Cognome e nome . . . . Firma . . . . Matricola . . . .

Corso di Laurea: ♢ EDIQQ ♢ EDILMU

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+7y)\sin(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

2. Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = e^{x^2} + e^{\frac{y^3}{3} - 49y}\,.$$

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

3. Calcolare la lunghezza della curva di equazione parametrica $\vec{r}(t) = 6t^2\vec{i} + 4t^3\vec{j}$, dove $t \in [-2,2]$.

. . . .

Risposta [3 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale triplo $\displaystyle\iiint_T (2x+2)\,dxdydz$ dove $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 3-(x^2+y^2)\,, 1 \leq z \leq 2\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita da

$$f_n(x) = \sqrt{1+\left|\frac{x}{2}\right|^n}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x \leq 0, \\ 6\sin^2 x & \text{se } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1, b_1, b_2.

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y' + \frac{2y}{t} = \frac{5}{2}\frac{e^{t^5}}{y}$ $\quad y(1) = \sqrt{e}$. (*suggerimento: porre* $y = \sqrt{z}$)

....

Risposta [3 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy $y' = 2(e^{\cos y} - 1)$, $\;y(0) = y_0$. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e globale e si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare SOLO di $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+7y)\sin(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = e^{x^2} + e^{\frac{y^3}{3} - 49y}\,.$$

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Calcolare la lunghezza della curva di equazione parametrica $\vec{r}(t) = 6t^2\vec{i} + 4t^3\vec{j}$, dove $t \in [-2,2]$.

....

Risposta [3 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale triplo $\displaystyle\iiint_T (2x+2)\,dxdydz$ dove $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 3-(x^2+y^2)\,, 1 \leq z \leq 2\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita da

$$f_n(x) = \sqrt{1 + \left|\frac{x}{2}\right|^n}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x \leq 0, \\ 6\sin^2 x & \text{se } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1, b_1, b_2.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y' + \frac{2y}{t} = \frac{5}{2}\frac{e^{t^5}}{y}$ $\quad y(1) = \sqrt{e}$. (*suggerimento: porre* $y = \sqrt{z}$)

. . . .

Risposta [3 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy $y' = 2(e^{\cos y} - 1)$, $\quad y(0) = y_0$. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e globale e si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare SOLO di $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

. . . .

Risposta [5 punti]:
