Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ EDIQQ ♢ EDILMU

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(x^2+2xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $\mathbb{R}^2$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = (x^2+y^2)(x^2+y^2-2)\,.$$

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Siano $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da $\overrightarrow{F}(x,y) = (x-y)\,\vec{i} + 7y\,\vec{j}$ e Γ la circonferenza di equazione $x^2+y^2-14x=0$ percorsa in senso antiorario. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'area di $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 3x\,,\ 0 \leq y \leq 4-x^2\}$.

....

Risposta [3 punti]:

---

5. Calcolare l'integrale triplo $\displaystyle\iiint_T \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdydz$ dove T è la parte di spazio interna al cilindro $x^2+y^2=2$, esterna al cilindro $x^2+y^2=1$ e compresa tra i piani $z=-1$ e $z=1$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia data la serie di funzioni così definita in $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^2+7n}.$$

Studiarne la convergenza puntuale, uniforme e totale (*può essere utile ricordare che vale* $|\sin y| \le |y|, \quad \forall y \in \mathbb{R}$).

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x \le 0, \\ 2x & \text{se } 0 < x \le \pi, \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare a_n $n \in \mathbb{N}$, b_n $n \in \mathbb{Z}^+$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{y-3}(y-2)\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale e globale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra e si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(x^2+2xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $\mathbb{R}^2$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = (x^2+y^2)(x^2+y^2-2)\,.$$

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Siano $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da $\overrightarrow{F}(x,y) = (x-y)\,\vec{i} + 7y\,\vec{j}$ e Γ la circonferenza di equazione $x^2+y^2-14x=0$ percorsa in senso antiorario. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'area di $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 3x\,,\ 0 \leq y \leq 4 - x^2\,\}$.

....

Risposta [3 punti]:

---

5. Calcolare l'integrale triplo $\displaystyle\iiint_T \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdydz$ dove T è la parte di spazio interna al cilindro $x^2+y^2=2$, esterna al cilindro $x^2+y^2=1$ e compresa tra i piani $z=-1$ e $z=1$.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia data la serie di funzioni così definita in $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^2+7n}.$$

Studiarne la convergenza puntuale, uniforme e totale (*può essere utile ricordare che vale* $|\sin y| \leq |y|, \quad \forall y \in \mathbb{R}$).

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x \leq 0, \\ 2x & \text{se } 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare a_n $n \in \mathbb{N}$, b_n $n \in \mathbb{Z}^+$.

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{y-3}(y-2)\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale e globale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra e si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:
