Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ EDIQQ ♢ EDILMU

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 7 e 8 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
6. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y| \sin x}{7x^2 + |y|} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,0)$ e $(0,2)$. Data $g(x,y) = \dfrac{e^x}{x+y+2}$, determinare $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

---

3. Dato il campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x,y) = (e^{7y} - 7\sin x)\overrightarrow{i} + 7xe^{7y}\overrightarrow{j}$.

Calcolare, al variare di $R \in \mathbb{R}^+$, gli integrali curvilinei $I_1 = \int_{\Gamma_1} \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, $I_2 = \oint_{\Gamma_2} \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$ dove Γ_1 la semicirconferenza di centro $(0,0)$ e raggio R con ordinate positive, mentre Γ_2 è l'intera circonferenza, percorse entrambe in senso antiorario. Verificare, in particolare, se $I_2 = 2I_1$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare il volume del solido

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 \le 1,\;\; x^2 + y^2 - 1 \le z \le 4 - x - y\right\}$$

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Siano dati $\alpha \in \mathbb{R}$ e la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{n^{\alpha-7}}{n+1} g(x-n)\,,$$

dove $g(x) = x^2 - 4$ per $|x| \le 2$, $g(x) = 0$ altrimenti.

Si determini, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

6. Sia $\beta \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + n^{\beta-1} e^{(7-x)n}\right), \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Si determini, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, l'insieme di convergenza puntuale. Solo nel caso $\beta = 3$, si studi anche la convergenza totale.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

7. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie $\displaystyle\int_\Gamma \left(2y + \frac{x^2}{8}\right) ds$ dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = 4e^{t/2}\,\vec{i} + (t - 1e^t)\,\vec{j}, \qquad t \in [0, 1]$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\cos y}{\cos y + 2} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi[$, se il problema ammette esistenza locale e globale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi[$, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y| \sin x}{7x^2 + |y|} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,0)$ e $(0,2)$. Data $g(x,y) = \dfrac{e^x}{x+y+2}$, determinare $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

---

3. Dato il campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x,y) = (e^{7y} - 7\sin x)\overrightarrow{i} + 7xe^{7y}\overrightarrow{j}$.
Calcolare, al variare di $R \in \mathbb{R}^+$, gli integrali curvilinei $I_1 = \int_{\Gamma_1} \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, $I_2 = \oint_{\Gamma_2} \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$ dove Γ_1 la semicirconferenza di centro $(0,0)$ e raggio R con ordinate positive, mentre Γ_2 è l'intera circonferenza, percorse entrambe in senso antiorario. Verificare, in particolare, se $I_2 = 2I_1$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare il volume del solido
$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2 \leq 1, \; x^2+y^2-1 \leq z \leq 4-x-y\}$$

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Siano dati $\alpha \in \mathbb{R}$ e la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f_n(x) = \frac{n^{\alpha-7}}{n+1} g(x-n)\,,$$
dove $g(x) = x^2 - 4$ per $|x| \leq 2$, $g(x) = 0$ altrimenti.

Si determini, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

....

Risposta [5 punti]:

---

6. Sia $\beta \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + n^{\beta-1} e^{(7-x)n}\right), \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Si determini, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, l'insieme di convergenza puntuale. Solo nel caso $\beta = 3$, si studi anche la convergenza totale.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie $\displaystyle\int_\Gamma \left(2y + \frac{x^2}{8}\right) ds$ dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = 4e^{t/2}\,\vec{i} + (t - 1e^t)\,\vec{j}, \qquad t \in [0, 1]$.

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\cos y}{\cos y + 2} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi[$, se il problema ammette esistenza locale e globale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi[$, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

....

Risposta [4 punti]:
