Cognome .... Nome ....

Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 7 e 8 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
6. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{x^2+8y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = 4y^2 - 2y^4 - x^2y^2$. Determinare e classificare i punti di stazionarietà di f.

....

Risposta [5 punti]:

---

3. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie $\displaystyle\int_\Gamma \sqrt{x^2+y^2+3}\, ds$ dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = (t\cos t - \sin t)\,\vec{i} + (t\sin t + \cos t)\,\vec{j}, \quad t \in [0,1]$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale triplo $\displaystyle\iiint_T \frac{8\sqrt{x^2+y^2}}{z^2}\,dxdydz,$, dove $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, x\geq 0,\ y\geq 0,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\leq x^2+y^2\leq 1,\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq z\leq \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}\},.$

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ la successione di funzioni definita da

$$f_n(x)=\frac{x^3-nx}{x^2+n},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

....

Risposta [5 punti]:

---

6. Sia $\alpha>0$ e sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha>0$ e, nei casi in cui è finito, si studi la convergenza sul bordo e la convergenza uniforme.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi,\pi]$ da $f(x)=\frac{1}{8}|\sin x|$, e prolungata per periodicità; sia $S(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1, b_1, a_2. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della sua serie di Fourier, sulla base delle caratteristiche di f. Calcolare $S(\frac{3}{2}\pi)$.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'=\log(y^2+\frac{e^2}{2})-2\\ y(0)=y_0.\end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0\in\mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0\in\mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{x^2+8y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = 4y^2 - 2y^4 - x^2y^2$. Determinare e classificare i punti di stazionarietà di f.

....

Risposta [5 punti]:

---

3. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie $\int_\Gamma \sqrt{x^2+y^2+3}\, ds$ dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = (t\cos t - \sin t)\,\vec{i} + (t\sin t + \cos t)\,\vec{j}, \quad t \in [0,1]$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale triplo $\iiint_T \dfrac{8\sqrt{x^2+y^2}}{z^2}\, dxdydz,$, dove $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ \frac{1}{\sqrt{3}} \leq x^2+y^2 \leq 1,\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq z \leq \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}\},$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ la successione di funzioni definita da

$$f_n(x) = \frac{x^3 - nx}{x^2+n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

....

Risposta [5 punti]:

---

6. Sia $\alpha > 0$ e sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha > 0$ e, nei casi in cui è finito, si studi la convergenza sul bordo e la convergenza uniforme.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = \frac{1}{8}|\sin x|$, e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1, b_1, a_2. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della sua serie di Fourier, sulla base delle caratteristiche di f. Calcolare $S(\frac{3}{2}\pi)$.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log(y^2 + \frac{e^2}{2}) - 2 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:
