Cognome e nome . . . . Firma . . . . Matricola . . . .

Corso di Laurea: ♢ EDIQQ ♢ EDILMU

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2 + \sin(7x^\alpha)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità e l'esistenza delle derivate direzionali di f in $(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{Z}^+$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

2. Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = x^2 y(y - 7x)\,.$$

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

3. Siano $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da $\overrightarrow{F}(x,y) = \frac{1}{2} y \overrightarrow{i}_1 + x \overrightarrow{i}_2$ e Γ la curva di rappresentazione parametrica $\overrightarrow{r}(t) = 3t^2 \overrightarrow{i}_1 + 2t \overrightarrow{i}_2$, $\quad 0 \leq t \leq 1$. Calcolare l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\Gamma \overrightarrow{F}\, d\Gamma$.

. . . .

Risposta [3 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \left[\frac{9}{2}\frac{xy^2}{x^2+y^2} + \sin(x^2y^3)\right] dxdy\,,$$

dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1/2 \le x^2+y^2 \le 2\,;\ |y| \le x\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia S la semisuperficie sferica (contenuta nel semispazio $z > 0$) di centro l'origine e raggio 1. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S 21z^2\,dS$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Al variare di $\beta \in [0,+\infty[$, determinare l'insieme della convergenza puntuale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{(n+1)(x-1)}}{n^\beta}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Discutere inoltre la convergenza totale della serie. Infine, calcolare la somma della serie per $\beta = 1$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2-4}{4t+4}\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Determinare la soluzione u del problema di Cauchy $y' = \dfrac{y^2-4}{4t+4}$, $\quad y(0) = 4$ e confrontare i risultati ottenuti con l'esercizio precedente.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

1. Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2+\sin(7x^\alpha)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Studiare la continuità e l'esistenza delle derivate direzionali di f in $(0,0)$ al variare di $\alpha\in\mathbb{Z}^+$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

2. Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y)=x^2y(y-7x)\,.$$

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

3. Siano $\overrightarrow{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da $\overrightarrow{F}(x,y)=\frac{1}{2}y\,\overrightarrow{i}_1+x\,\overrightarrow{i}_2$ e Γ la curva di rappresentazione parametrica $\overrightarrow{r}(t)=3t^2\,\overrightarrow{i}_1+2t\,\overrightarrow{i}_2,\quad 0\le t\le 1$. Calcolare l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\Gamma \overrightarrow{F}\,d\Gamma$.

. . . .

Risposta [3 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T\left[\frac{9}{2}\frac{xy^2}{x^2+y^2}+\sin(x^2y^3)\right]\,dxdy\,,$$

dove $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:1/2\le x^2+y^2\le 2\,;\ |y|\le x\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia S la semisuperficie sferica (contenuta nel semispazio $z>0$) di centro l'origine e raggio 1. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S 21z^2\,dS$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Al variare di $\beta \in [0, +\infty[$, determinare l'insieme della convergenza puntuale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{(n+1)(x-1)}}{n^\beta}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Discutere inoltre la convergenza totale della serie. Infine, calcolare la somma della serie per $\beta = 1$.

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 - 4}{4t + 4}, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Determinare la soluzione u del problema di Cauchy $y' = \dfrac{y^2 - 4}{4t + 4}, \quad y(0) = 4$ e confrontare i risultati ottenuti con l'esercizio precedente.

....

Risposta [4 punti]:
