Cognome .... Nome ....

Matricola .... Firma..

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 7 e 8 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
6. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\exp(x^3) - 1}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = (y^2 - x)^2(x^2 - y)$. Verificare che i punti dell'insieme $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x = y^2\}$ sono stazionari per f e classificarli.

....

Risposta [5 punti]:

---

3. Dato il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = (e^y + x \arctan x)\,\vec{i} + (xe^y + \sin y)\,\vec{j}$, calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, dove Γ è l'arco di parabola $y = x^2$ percorsa da $(-2,4)$ a $(2,4)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale triplo $\iiint_T [\cos(x^2+y^2)+\arctan z]\,dxdydz$ dove $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 3,\ y \geq |x|,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I e, in particolare, in $[-2,2]$.

Risposta [5 punti]:

---

6. Siano dati $\beta \in \mathbb{R}$ e la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^{\beta-2} n \log(n^3)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Determinare il raggio di convergenza al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, studiare la convergenza sul bordo e la convergenza uniforme.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi,\pi]$ da $f(x) = 0$ se $-\pi < x \leq 0$, $f(x) = 2x$ se $0 < x \leq \pi$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare a_n $n \in \mathbb{N}$, b_n $n \in \mathbb{Z}^+$. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme di $S(x)$, sulla base delle caratteristiche di f. Calcolare $S(2\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$, $S(3\pi)$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y-2}{\sqrt{y^2+1}} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e globale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, monotonia e flessi delle soluzioni. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

1. Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\exp(x^3) - 1}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = (y^2 - x)^2(x^2 - y)$. Verificare che i punti dell'insieme $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = y^2\}$ sono stazionari per f e classificarli.

....

Risposta [5 punti]:

---

3. Dato il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = (e^y + x \arctan x)\,\vec{\imath} + (xe^y + \sin y)\,\vec{\jmath}$, calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, dove Γ è l'arco di parabola $y = x^2$ percorsa da $(-2,4)$ a $(2,4)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale triplo $\iiint_T [\cos(x^2 + y^2) + \arctan z]\, dxdydz$ dove $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 3,\ y \geq |x|,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + n}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I e, in particolare, in $[-2,2]$.

Risposta [5 punti]:

---

6. Siano dati $\beta \in \mathbb{R}$ e la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^{\beta-2} n \log(n^3)}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Determinare il raggio di convergenza al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, studiare la convergenza sul bordo e la convergenza uniforme.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 0$ se $-\pi < x \leq 0$, $f(x) = 2x$ se $0 < x \leq \pi$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare a_n $n \in \mathbb{N}$, b_n $n \in \mathbb{Z}^+$. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme di $S(x)$, sulla base delle caratteristiche di f. Calcolare $S(2\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$, $S(3\pi)$.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y-2}{\sqrt{y^2+1}} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e globale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, monotonia e flessi delle soluzioni. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:
