Cognome .... Nome ....

Matricola .... Firma..

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 7 e 8 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
6. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Siano $\alpha > 0$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\big[(x^2+y^2) - \sin(x^2+y^2)\big]^\alpha}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $(0,0)$ al variare di $\alpha > 0$.

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia T il triangolo di vertici $A(-3,0)$, $O(0,0)$ e $B(0,3)$ e sia $g : T \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $g(x,y) = \frac{1}{4}xy^2e^{y-x}$. Determinare $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 3 punti, calcolo di M e punti di massimo 1 punti]:

---

3. Dato il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = -\frac{xy}{\sqrt{y-x^2}}\,\vec{i} + \frac{3y-2x^2}{2\sqrt{y-x^2}}\,\vec{j}$, calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma$, dove Γ è l'arco di parabola $y = x^2+1$ percorso da $A(0,1)$ verso $B(1,2)$.

....

Risposta [3 punti]:

---

4. Dato il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = 2xy\,\vec{i} + (2x+y)\,\vec{j}$, calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, dove Γ è il bordo della regione di piano T definita da $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1 \text{ e } x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$. *(può essere utile applicare il teorema di Green...)*

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni $f_n(x) = (e^x - \frac{1}{2})^n e^{1/n}$, $\quad x \in [0, +\infty[\quad n \in \mathbb{Z}^+$.

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

Risposta [5 punti]:

---

6. Studiare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la convergenza puntuale e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{e^{(\beta-1)n}}, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Risposta [5 punti]:

---

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 3|\sin x|$ se $|x| < \frac{\pi}{2}$, 0 altrimenti e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1, b_1. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme di $S(x)$, sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(4\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$, $S(3\pi)$.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^2(1 - 2e^{-y}) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia; si discuta per quali valori di $y_0 \in \mathbb{R}$ l'intervallo massimale è illimitato a sinistra; in tali casi determinare gli asintoti delle soluzioni. Ci sono valori di $y_0 \in \mathbb{R}$ per cui l'intervallo massimale è illimitato a destra?

....

Risposta [5 punti]:

---

1. Siano $\alpha > 0$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\big[(x^2+y^2) - \sin(x^2+y^2)\big]^\alpha}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $(0,0)$ al variare di $\alpha > 0$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia T il triangolo di vertici $A(-3,0)$, $O(0,0)$ e $B(0,3)$ e sia $g : T \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $g(x,y) = \frac{1}{4}xy^2e^{y-x}$. Determinare $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ ed i punti in cui sono assunti.

. . . .

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 3 punti, calcolo di M e punti di massimo 1 punti]:

---

3. Dato il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = -\frac{xy}{\sqrt{y-x^2}}\,\vec{\imath} + \frac{3y-2x^2}{2\sqrt{y-x^2}}\,\vec{\jmath}$, calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, dove Γ è l'arco di parabola $y = x^2+1$ percorso da $A(0,1)$ verso $B(1,2)$.

. . . .

Risposta [3 punti]:

---

4. Dato il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = 2xy\,\vec{\imath} + (2x+y)\,\vec{\jmath}$, calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, dove Γ è il bordo della regione di piano T definita da $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1 \text{ e } x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$. *(può essere utile applicare il teorema di Green...)*

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni $f_n(x) = (e^x - \frac{1}{2})^n e^{1/n}$, $\quad x \in [0,+\infty[\quad n \in \mathbb{Z}^+$.

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

Risposta [5 punti]:

---

6. Studiare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la convergenza puntuale e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{e^{(\beta-1)n}}, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Risposta [5 punti]:

---

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 3|\sin x|$ se $|x| < \frac{\pi}{2}$, 0 altrimenti e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1, b_1. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme di $S(x)$, sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(4\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$, $S(3\pi)$.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^2(1 - 2e^{-y}) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia; si discuta per quali valori di $y_0 \in \mathbb{R}$ l'intervallo massimale è illimitato a sinistra; in tali casi determinare gli asintoti delle soluzioni. Ci sono valori di $y_0 \in \mathbb{R}$ per cui l'intervallo massimale è illimitato a destra?

....

Risposta [5 punti]:
