Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ◇ MECLT ◇ MATLT ◇ AUTLT ◇ EDIQQ

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Siano $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y|^{7\alpha}}{3(x^2+y^2)^{3/2}} \sin(x^2+y^2) e^{-|y/x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ f è continua in $(0,0)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Si consideri la funzione $g(x,y) = e^x(2x-y)^2$. Stabilire se g ammette minimo assoluto m e massimo assoluto M su tutto $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, determinarne il valore ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [3 punti]:

---

3. Siano $\beta \in \mathbb{R}$ e $\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$\vec{F}(x,y) = \left[\frac{2y^3}{x} + 4\sin(x^2)x\right]\vec{i} + \left[\beta y^2 \log(x) + \arctan\left(\frac{1}{1+y^2}\right)\right]\vec{j}\,.$$

Si determinino il dominio A ed i valori di $\beta \in \mathbb{R}$ per cui il campo vettoriale è conservativo in A. In corrispondenza a tali valori di β si calcoli l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma$, in cui Γ è l'arco di circonferenza di centro $(2,0)$ e raggio 1, percorsa in senso orario dal punto $A = (1,0)$ al punto $B = (3,0)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Si consideri la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -x^2 - y^2 - 3 + 4x\,, z \geq 0\}$. Calcolare il flusso uscente del rotore di $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ attraverso S, dove
$$\vec{F}(x, y, z) = [4y + 2z]\,\vec{i} + [(x-2)^2 + 3ze^z]\,\vec{j} + [e^{x+y} + z^2]\,\vec{k}.$$

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Dopo aver calcolato il raggio di convergenza r della seguente serie di potenze
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{x^{2n}}{49^n}\,,$$
determinare l'insieme di convergenza uniforme (motivando la risposta) e la sua funzione somma f.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Si consideri il seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{t+1}}\right) y \arctan(y+2) \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$
Discutere, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità (locale e globale); studiare inoltre la monotonia e gli eventuali limiti della soluzione per $t \to +\infty$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

7. Determinare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \frac{3y^2+t^2}{2ty}\,, \\ y(1) = 1\,. \end{cases}$$
(suggerimento: porre $z = y/t$...)

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Calcolare l'integrale $\displaystyle\iint_T [|x| + 7\sin^3 y]\,dxdy$ dove $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \geq 1 \text{ e } x^2 + 4y^2 \leq 4\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

1. Siano $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y|^{7\alpha}}{3(x^2+y^2)^{3/2}} \sin(x^2+y^2) e^{-|y/x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ f è continua in $(0,0)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Si consideri la funzione $g(x,y) = e^x(2x-y)^2$. Stabilire se g ammette minimo assoluto m e massimo assoluto M su tutto $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, determinarne il valore ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [3 punti]:

---

3. Siano $\beta \in \mathbb{R}$ e $\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$\vec{F}(x,y) = \left[\frac{2y^3}{x} + 4\sin(x^2)x\right]\vec{i} + \left[\beta y^2 \log(x) + \arctan\left(\frac{1}{1+y^2}\right)\right]\vec{j}\,.$$

Si determinino il dominio A ed i valori di $\beta \in \mathbb{R}$ per cui il campo vettoriale è conservativo in A. In corrispondenza a tali valori di β si calcoli l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma$, in cui Γ è l'arco di circonferenza di centro $(2,0)$ e raggio 1, percorsa in senso orario dal punto $A = (1,0)$ al punto $B = (3,0)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Si consideri la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = -x^2 - y^2 - 3 + 4x\,, z \geq 0\}$. Calcolare il flusso uscente del rotore di $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ attraverso S, dove

$$\vec{F}(x,y,z) = [4y + 2z]\,\vec{i} + [(x-2)^2 + 3ze^z]\,\vec{j} + [e^{x+y} + z^2]\,\vec{k}.$$

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Dopo aver calcolato il raggio di convergenza r della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{x^{2n}}{49^n}\,,$$

determinare l'insieme di convergenza uniforme (motivando la risposta) e la sua funzione somma f.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{t+1}}\right) y \arctan(y+2) \\ y(0) = y_0 \, . \end{cases}$$

Discutere, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità (locale e globale); studiare inoltre la monotonia e gli eventuali limiti della soluzione per $t \to +\infty$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

7. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{3y^2+t^2}{2ty} \, , \\ y(1) = 1 \, . \end{cases}$$

(suggerimento: porre $z = y/t$...)

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Calcolare l'integrale $\displaystyle\iint_T [|x| + 7\sin^3 y] \, dxdy$ dove
$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \geq 1 \text{ e } x^2 + 4y^2 \leq 4\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:
