

Cognome e nome.....Firma.....Matricola

Corso di Laurea: ◇ EDIQQ ◇ EDILMU

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo.**
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

1. Si consideri la funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{6 - y - 4x}{6 - y + 4x}} + \log(4 - y^2) + \arcsin \frac{x^2}{1 + x^2}.$$

Si determini il dominio A di f .

.....

Risposta [4 punti]:

2. Si consideri la funzione $g(x, y) = |x - y|^3$ definita sul rettangolo $Q = [-1, 1] \times [0, 2]$. Calcolare il minimo m ed il massimo M di g su Q specificando in quali punti essi vengono assunti.

.....

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

3. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie $\int_{\Gamma} \frac{y^2}{3(1 + x^2)} ds$ dove Γ è il segmento di estremi $(0, 0)$ e $(1, \sqrt{3})$.

.....

Risposta [4 punti]:

4. Sia Γ il bordo orientato (in senso antiorario) della semicorona circolare delimitata dalle circonferenze $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$ e contenuta nel semispazio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Calcolare

$$I = \int_{\Gamma} \left(\frac{2}{7}y^2 - e^{\sin x} \right) dx + \left(\frac{1}{7}xy + \sqrt{y^7 + 1} \right) dy$$

.....

Risposta [4 punti]:

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$ così definita in \mathbb{R} :

$$f_n(x) = \left(\frac{x}{2} \right)^n \frac{\arctan(nx)}{n}.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

.....

Risposta [4 punti]:

6. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \log \left(1 + \frac{7x}{n} \right)}{(7x + n)^2}, \quad x \geq 0,$$

discuterne la convergenza puntuale e totale.

.....

Risposta [4 punti]:

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π , definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ e prolungata per periodicità; sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0 e a_1 ; mostrare che $b_n = 0 \forall n \in \mathbb{Z}^+$ e che $a_n = 0 \forall n \geq 2$. Calcolare $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$.

.....

Risposta [3 punti]:

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y - 2)e^y, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale e globale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni. L'intervallo massimale è illimitato a destra e/o a sinistra per qualche valore di y_0 ?

.....

Risposta [5 punti]:

1. Si consideri la funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{6 - y - 4x}{6 - y + 4x}} + \log(4 - y^2) + \arcsin \frac{x^2}{1 + x^2}.$$

Si determini il dominio A di f .

.....

Risposta [4 punti]:

2. Si consideri la funzione $g(x, y) = |x - y|^3$ definita sul rettangolo $Q = [-1, 1] \times [0, 2]$. Calcolare il minimo m ed il massimo M di g su Q specificando in quali punti essi vengono assunti.

.....

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

3. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie $\int_{\Gamma} \frac{y^2}{3(1+x^2)} ds$ dove Γ è il segmento di estremi $(0, 0)$ e $(1, \sqrt{3})$.

.....

Risposta [4 punti]:

4. Sia Γ il bordo orientato (in senso antiorario) della semicorona circolare delimitata dalle circonferenze $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$ e contenuta nel semispazio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Calcolare

$$I = \int_{\Gamma} \left(\frac{2}{7}y^2 - e^{\sin x} \right) dx + \left(\frac{1}{7}xy + \sqrt{y^7 + 1} \right) dy$$

.....

Risposta [4 punti]:

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$ così definita in \mathbb{R} :

$$f_n(x) = \left(\frac{x}{2} \right)^n \frac{\arctan(nx)}{n}.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

.....

Risposta [4 punti]:

6. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \log \left(1 + \frac{7x}{n}\right)}{(7x + n)^2}, \quad x \geq 0,$$

discuterne la convergenza puntuale e totale.

.....

Risposta [4 punti]:

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π , definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ e prolungata per periodicit ; sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0 e a_1 ; mostrare che $b_n = 0 \forall n \in \mathbb{Z}^+$ e che $a_n = 0 \forall n \geq 2$. Calcolare $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$.

.....

Risposta [3 punti]:

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y - 2)e^y, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicit  locale e globale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavit  e flessi delle soluzioni. L'intervallo massimale   illimitato a destra e/o a sinistra per qualche valore di y_0 ?

.....

Risposta [5 punti]:
