Cognome .... Nome ....

Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 7 e 8 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
6. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Siano $\alpha > 0$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{1-\cos(|x|^\alpha + |y|^\alpha)}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $(0,0)$ al variare di $\alpha > 0$.

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = x[(x-1)^2 + y^2 - 1]$. Determinare i punti stazionari e classificarli.

....

Risposta [5 punti]:

---

3. Dato il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = (x^2+y^2)\,\vec{i} + (x^2-y^2)\,\vec{j}$, calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, dove Γ la circonferenza di centro $(0,0)$, raggio 1 e percorsa in senso antiorario. *(può essere utile notare che* $\cos^3 t = \cos t(1-\sin^2 t)$*)*

....

Risposta [3 punti]:

---

4. Calcolare l'area della superficie del paraboloide $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \, ; \; 0 \le z \le 1\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^2}{n^2 + (\frac{x}{2})^{2n}}\,, \quad x \in [0, +\infty[\quad n \in \mathbb{Z}^+\,.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

Risposta [5 punti]:

---

6. Studiare al variare di $\beta \ge 0$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x)^{n(\beta+1)}}{(n!)^{1-\beta/7}}, \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\,.$$

Calcolare la sua somma per $\beta = 0$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

7. Calcolare

$$\iint_T \left[\frac{\arctan(x^9)}{1+y^2} + 3\right] dxdy\,,$$

dove $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : |x| \le y \le 2 - x^2\}$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(e^y - 1)(2 - e^y)}{e^y} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia; si discuta per quali valori di $y_0 \in \mathbb{R}$ l'intervallo massimale è illimitato a destra; in tali casi determinare gli asintoti delle soluzioni.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

1. Siano $\alpha > 0$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{1-\cos(|x|^\alpha + |y|^\alpha)}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $(0,0)$ al variare di $\alpha > 0$.

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = x[(x-1)^2 + y^2 - 1]$. Determinare i punti stazionari e classificarli.

....

Risposta [5 punti]:

---

3. Dato il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = (x^2+y^2)\,\vec{i} + (x^2-y^2)\,\vec{j}$, calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, dove Γ la circonferenza di centro $(0,0)$, raggio 1 e percorsa in senso antiorario. *(può essere utile notare che* $\cos^3 t = \cos t(1-\sin^2 t)$*)*

....

Risposta [3 punti]:

---

4. Calcolare l'area della superficie del paraboloide $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \, ; \; 0 \leq z \leq 1\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^2}{n^2 + (\frac{x}{2})^{2n}}\,, \quad x \in [0, +\infty[\quad n \in \mathbb{Z}^+ \,.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

Risposta [5 punti]:

---

6. Studiare al variare di $\beta \geq 0$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x)^{n(\beta+1)}}{(n!)^{1-\beta/7}}, \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Calcolare la sua somma per $\beta = 0$.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Calcolare

$$\iint_T \left[\frac{\arctan(x^9)}{1+y^2} + 3\right] dxdy\,,$$

dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| \leq y \leq 2 - x^2\}$.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(e^y - 1)(2 - e^y)}{e^y} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia; si discuta per quali valori di $y_0 \in \mathbb{R}$ l'intervallo massimale è illimitato a destra; in tali casi determinare gli asintoti delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:
