Cognome .... Nome ....

Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 7 e 8 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
6. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{7x^2|y|}-1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia T l'insieme definito da $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-2)^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq 2\,,\ y \geq 0\,\}$ e sia $g(x,y) = y^2 - x - \frac{1}{4}$. Determinare $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 3 punti]:

---

3. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z}{\sqrt{50+x^2+y^2}}ds$ dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = t\cos t\,\vec{i} + t\sin t\,\vec{j} + 7t\,\vec{k}, \quad t \in [0, 2\pi]$.

....

Risposta [3 punti]:

---

4. Sia $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} - x\vec{j} + 3\vec{k}$; calcolare il flusso $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, dove $\vec{n}$ è il versore normale esterno alla superficie S data da $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 1 - x^2 - y^2\,;\ x \geq 0\,, y \geq 0\,, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{7 + n^2x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente, nei suoi sottoinsiemi.

Risposta [5 punti]:

---

6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 0$ se $-\pi < x \leq 0$, $f(x) = \frac{1}{4}\cos x \sin x$ se $0 < x \leq \pi$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1, b_1, a_2. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme di $S(x)$, sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(\frac{\pi}{4})$.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D 3(x^3 + y)\,dxdy$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 > 1\,, (x,y) \in T\}$, dove T è il trapezio di vertici $(2,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-2,0)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = ty(y-2) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e globale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, monotonia e flessi delle soluzioni. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:

---

1. Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{7x^2|y|} - 1}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia T l'insieme definito da $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-2)^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq 2\,,\ y \geq 0\}$ e sia $g(x,y) = y^2 - x - \frac{1}{4}$. Determinare $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ ed i punti in cui sono assunti.

. . . .

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 3 punti]:

---

3. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z}{\sqrt{50 + x^2 + y^2}}\,ds$ dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = t\cos t\,\vec{i} + t\sin t\,\vec{j} + 7t\,\vec{k}, \quad t \in [0, 2\pi]$.

. . . .

Risposta [3 punti]:

---

4. Sia $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} - x\vec{j} + 3\vec{k}$; calcolare il flusso $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, dove $\vec{n}$ è il versore normale esterno alla superficie S data da $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 1 - x^2 - y^2\,;\ x \geq 0\,, y \geq 0\,, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{7 + n^2x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente, nei suoi sottoinsiemi.

Risposta [5 punti]:

---

6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 0$ se $-\pi < x \leq 0$, $f(x) = \frac{1}{4} \cos x \sin x$ se $0 < x \leq \pi$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1, b_1, a_2. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme di $S(x)$, sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(\frac{\pi}{4})$.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D 3(x^3 + y)\, dxdy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 > 1\,, (x, y) \in T\}$, dove T è il trapezio di vertici $(2, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-2, 0)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = ty(y-2) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e globale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, monotonia e flessi delle soluzioni. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:
