Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ MECLT ♢ MATLT ♢ AUTLT ♢ EDIQQ ♢ EDILMU

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{7x^2 + \sin(7x)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = x^2(x^2 - y + 2)$. Determinare e classificare i punti stazionari di f.

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Dopo aver determinato per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale piano $\overrightarrow{F}(x,y) = \left(e^{x^7} + \alpha y^3\right)\overrightarrow{i} + 2xy^2\overrightarrow{j}$ è conservativo in $\mathbb{R}^2$, per tale valore di α si calcoli il lavoro compiuto dal campo $\overrightarrow{F}$ lungo Γ : $\overrightarrow{r}(t) = (1+\cos t)\overrightarrow{i} + (1+\sin t)\overrightarrow{j}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale triplo $\iiint_V 6z\, dxdydz$ dove V è il dominio definito da $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{2x^2 + y^2 + 1} \leq z \leq 1 - x\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita da $f_n(x) = \sqrt{\dfrac{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n^2}}$. Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $\beta \in \mathbb{R}^+$. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\beta/3}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)(x-7)^n\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\beta \in \mathbb{R}^+$ e, nei casi in cui è finito, si studi la convergenza sul bordo. Si discuta, inoltre, la convergenza uniforme e la convergenza totale della serie, al variare di $\beta \in \mathbb{R}^+$.

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y + \dfrac{e^{4t}}{y}\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$ Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, la monotonia delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra o no, motivando la risposta. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni all'estremo destro degli intervalli massimali.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} yy' = y^2 + e^{4t}\,, \\ y(0) = -1\,. \end{cases}$ e confrontare i risultati ottenuti con l'esercizio precedente.

(Sugg.: porre $z(t) = y^2(t)$, osservando che $2yy' = \frac{d}{dt}y^2$ ...)

....

Risposta [3 punti]:

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{7x^2 + \sin(7x)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = x^2(x^2 - y + 2)$. Determinare e classificare i punti stazionari di f.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

3. Dopo aver determinato per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale piano $\overrightarrow{F}(x,y) = \left(e^{x^7} + \alpha y^3\right)\overrightarrow{i} + 2xy^2\overrightarrow{j}$ è conservativo in $\mathbb{R}^2$, per tale valore di α si calcoli il lavoro compiuto dal campo $\overrightarrow{F}$ lungo $\Gamma: \ \overrightarrow{r}(t) = (1+\cos t)\overrightarrow{i} + (1+\sin t)\overrightarrow{j}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale triplo $\iiint_V 6z \, dxdydz$ dove V è il dominio definito da $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{2x^2 + y^2 + 1} \leq z \leq 1 - x\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita da $f_n(x) = \sqrt{\dfrac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n^2}}$. Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $\beta \in \mathbb{R}^+$. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\beta/3}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) (x-7)^n \,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\beta \in \mathbb{R}^+$ e, nei casi in cui è finito, si studi la convergenza sul bordo. Si discuta, inoltre, la convergenza uniforme e la convergenza totale della serie, al variare di $\beta \in \mathbb{R}^+$.

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y + \dfrac{e^{4t}}{y}\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$ Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, la monotonia delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra o no, motivando la risposta. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni all'estremo destro degli intervalli massimali.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} yy' = y^2 + e^{4t}\,, \\ y(0) = -1\,. \end{cases}$ e confrontare i risultati ottenuti con l'esercizio precedente.

(Sugg.: porre $z(t) = y^2(t)$, osservando che $2yy' = \frac{d}{dt}y^2$ ...)

....

Risposta [3 punti]:
