Cognome .... Nome ....

Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), numero di matricola e firmare.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 3 e 5 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari.
6. CONSEGNARE **questo foglio e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 90 min.

---

1. Sia data la successione di funzioni $f_n : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da
$$f_n(x) = (x-1)(x-2)^n \, .$$
Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente, nei suoi sottoinsiemi. Converge uniformemente $[1, 2]$?

   ....

   Risposta :

---

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Data la serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^{n+1}}{(n!)^{\alpha-7}},$$
si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi la convergenza sul bordo. Calcolarne la somma nel caso $\alpha = 8$.

   ....

   Risposta :

---

3. Si consideri la seguente serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin x)^n}{n+7+(\sin x)^{n+1}}, \qquad x \in [0, \pi] \, .$$
Si discuta la convergenza puntuale in $[0, \pi]$ e totale in $[0, \frac{\pi}{4}]$.

   ....

   Risposta :

---

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x \leq 0 \\ 2\cos x & \text{se } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1, b_1. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme di $S(x)$, sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(4\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$, $S(3\pi)$.

....

Risposta :

---

5. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(y-3) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

....

Risposta :

---

1. Sia data la successione di funzioni $f_n : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da
$$f_n(x) = (x-1)(x-2)^n \, .$$
Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente, nei suoi sottoinsiemi. Converge uniformemente $[1, 2]$?

   ....

   Risposta :

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Data la serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^{n+1}}{(n!)^{\alpha-7}},$$
si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi la convergenza sul bordo. Calcolarne la somma nel caso $\alpha = 8$.

   ....

   Risposta :

3. Si consideri la seguente serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin x)^n}{n + 7 + (\sin x)^{n+1}}, \qquad x \in [0, \pi] \, .$$
Si discuta la convergenza puntuale in $[0, \pi]$ e totale in $[0, \frac{\pi}{4}]$.

   ....

   Risposta :

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x \leq 0 \\ 2\cos x & \text{se } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$
e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1, b_1. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme di $S(x)$, sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(4\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$, $S(3\pi)$.

   ....

   Risposta :

5. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(y-3) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

. . . .

Risposta :