Cognome .... Nome ....

Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 7 e 8 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
6. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\sin(7x)\log(1+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : 0 \le x+y \le 2\,,\ 0 \le y \le 2\}$. Data $g(x,y) = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$, determinare $M = \max_D g$ e $m = \min_D g$ ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

---

3. Calcolare la lunghezza L della curva Γ di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = 4\cos^3 t\,\vec{i} + 4\sin^3 t\,\vec{j}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

....

Risposta [3 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T [2(x+y) + \frac{1}{4}y^2 z]\, dxdydz$$

dove $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \leq z \,,\, 0 \leq z \leq 4\}$

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \log\left(1 + 2x^n\right)\,, \quad x \in [0, +\infty[.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente, nei suoi sottoinsiemi.

Risposta [5 punti]:

---

6. Siano $\beta \in \mathbb{R}$ e la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n^{6\beta} + x\sqrt{n}}{n^{6\beta}}\right), \quad x \in [1, +\infty[\,.$$

Discutere al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la convergenza puntuale e totale della serie.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Dopo aver determinato per quale valore del parametro reale α il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left[\frac{\alpha x y^3}{1+x^2} + \arctan y\right]\overrightarrow{i} + \left[3y^2\log(x^2+1) + \frac{x}{1+y^2}\right]\overrightarrow{j}$$

è conservativo nel suo dominio, per tale valore di α calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, essendo Γ la curva $y = x^3\,, \quad 0 \leq x \leq 1$, percorsa nel verso che va dal punto $(0,0)$ al punto $(1,1)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y-2}{e^y+2} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

....

Risposta [4 punti]:

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\sin(7x)\log(1+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : 0 \leq x+y \leq 2 \, , \, 0 \leq y \leq 2\}$. Data $g(x,y) = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$, determinare $M = \max_D g$ e $m = \min_D g$ ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

---

3. Calcolare la lunghezza L della curva Γ di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = 4\cos^3 t\,\vec{i} + 4\sin^3 t\,\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

....

Risposta [3 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T [2(x+y) + \frac{1}{4}y^2 z]\, dxdydz$$

dove $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 \leq z \, , \, 0 \leq z \leq 4\}$

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \log\left(1+2x^n\right) \, , \quad x \in [0,+\infty[.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente, nei suoi sottoinsiemi.

Risposta [5 punti]:

---

6. Siano $\beta \in \mathbb{R}$ e la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n^{6\beta} + x\sqrt{n}}{n^{6\beta}}\right), \quad x \in [1, +\infty[\,.$$

Discutere al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la convergenza puntuale e totale della serie.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Dopo aver determinato per quale valore del parametro reale α il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left[\frac{\alpha x y^3}{1+x^2} + \arctan y\right]\overrightarrow{i} + \left[3y^2\log(x^2+1) + \frac{x}{1+y^2}\right]\overrightarrow{j}$$

è conservativo nel suo dominio, per tale valore di α calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, essendo Γ la curva $y = x^3\,, \quad 0 \leq x \leq 1\,,$ percorsa nel verso che va dal punto $(0,0)$ al punto $(1,1)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y-2}{e^y+2} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

....

Risposta [4 punti]:
