Cognome .... Nome ....

Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), numero di matricola e firmare.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 3 e 5 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari.
6. CONSEGNARE **questo foglio e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 90 min.

---

1. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \log(1+2x^n), \quad x \in [0,+\infty[.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

Risposta :

---

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n x^n}{n^\alpha + 1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi anche la convergenza sul bordo e si determini il caso in cui la convergenza uniforme è verificata anche sul bordo.

....

Risposta :

---

3. Siano $\beta \in \mathbb{R}$ e la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n^{6\beta} + x\sqrt{n}}{n^{6\beta}}\right), \quad x \in [1,+\infty[.$$

Discutere al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la convergenza puntuale e totale della serie.

....

Risposta :

---

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 2(x+\pi)$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti $\{a_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$ $n \in \mathbb{Z}^+$. Sulla base delle caratteristiche di f si calcoli $S(3\pi)$.

....

Risposta :

---

5. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y-2}{e^y+2} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

....

Risposta :

---

1. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \log\left(1 + 2x^n\right), \quad x \in [0, +\infty[.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

Risposta : ____________________

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n x^n}{n^\alpha + 1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi anche la convergenza sul bordo e si determini il caso in cui la convergenza uniforme è verificata anche sul bordo.

. . . .

Risposta :

---

3. Siano $\beta \in \mathbb{R}$ e la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n^{6\beta} + x\sqrt{n}}{n^{6\beta}}\right), \quad x \in [1, +\infty[.$$

Discutere al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la convergenza puntuale e totale della serie.

. . . .

Risposta :

---

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 2(x + \pi)$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti $\{a_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$ $n \in \mathbb{Z}^+$. Sulla base delle caratteristiche di f si calcoli $S(3\pi)$.

. . . .

Risposta :

---

5. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y-2}{e^y+2} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

. . . .

Risposta :
