Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ◊ MECLT ◊ MATLT ◊ AUTLT ◊ EDIQQ

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Siano f, g le funzioni definite da $f(x,y) = \sqrt{1-7(x^2+y^2)} + \sqrt[4]{3-7(x^2+y^2)}$ e $g(x,y) = \log(1-7(x^2+y^2)) + xy$. Siano D_f e D_g i domini di f e g rispettivamente; determinare $D_f \setminus D_g$.

   ...

   Risposta [3 punti]:

2. Si consideri la funzione $f(x,y) = (x+y)(y+2x)$ e il triangolo chiuso T di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$. Detti $m = \min_T f$ e $M = \max_T f$, determinare m, M ed i punti in cui essi vengono assunti.

   ...

   Risposta [Calcolo di m 2 punti, calcolo di M 2 punti]:

3. Determinare per quale valore del parametro reale α il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y) = x^x \left[\frac{(\log x + 1)(e^{2y}+1)}{e^y} \overrightarrow{i}_1 + 2\sinh(7\alpha y)\overrightarrow{i}_2 \right].$$

   è conservativo nel suo dominio.

   ...

   Risposta [4 punti]:

4. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S z(2x+y)\,dS$, dove $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2+z^2 = 2\,, z \geq 0\,, x \geq 0\,, y \geq 0\}$.

   ...

   Risposta [4 punti]:

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ così definita in $[0, 28\pi]$:

$$f_n(x) = \left(\sqrt{2}\cos\frac{x}{28}\right)^n .$$

Si determini il limite puntuale f e si discuta la convergenza uniforme in tutto $[0, 28\pi]$ e nei suoi sottoinsiemi *(può essere utile la sostituzione $\sqrt{2}\cos\frac{x}{28} = t\ldots$).*

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 6\sin^2 x + \sin x & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare a_0, a_1, b_1, b_2.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy $y' = \frac{y+2}{2\log(y+2)}$, $y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino poi monotonia, convessità e flessi della soluzione al variare di y_0. L'intervallo massimale può essere illimitato a destra per qualche valore di y_0?

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Dopo aver determinato la soluzione del problema di Cauchy $y' = \frac{y+2}{2\log(y+2)}$, $y(0) = 0$, verificare se l'intervallo massimale è illimitato a destra. Può essere illimitato a sinistra? Risolvere il problema di Cauchy con la condizione $y(0) = -\frac{3}{2}$ e confrontare la situazione con il caso precedente.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

1. Siano f, g le funzioni definite da $f(x,y) = \sqrt{1 - 7(x^2 + y^2)} + \sqrt[4]{3 - 7(x^2 + y^2)}$ e $g(x,y) = \log(1 - 7(x^2 + y^2)) + xy$. Siano D_f e D_g i domini di f e g rispettivamente; determinare $D_f \setminus D_g$.

   ....

   Risposta [3 punti]:

2. Si consideri la funzione $f(x,y) = (x+y)(y+2x)$ e il triangolo chiuso T di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$. Detti $m = \min_T f$ e $M = \max_T f$, determinare m, M ed i punti in cui essi vengono assunti.

   ....

   Risposta [Calcolo di m 2 punti, calcolo di M 2 punti]:

3. Determinare per quale valore del parametro reale α il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y) = x^x \left[\frac{(\log x + 1)(e^{2y} + 1)}{e^y} \vec{i}_1 + 2\sinh(7\alpha y)\, \vec{i}_2 \right].$$

   è conservativo nel suo dominio.

   ....

   Risposta [4 punti]:

4. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S z(2x+y)\, dS$, dove $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 2\,, z \geq 0\,, x \geq 0\,, y \geq 0\,\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ così definita in $[0, 28\pi]$:

$$f_n(x) = \left(\sqrt{2} \cos \frac{x}{28} \right)^n.$$

   Si determini il limite puntuale f e si discuta la convergenza uniforme in tutto $[0, 28\pi]$ e nei suoi sottoinsiemi *(può essere utile la sostituzione $\sqrt{2}\cos\frac{x}{28} = t \ldots$)*.

   ....

   Risposta [4 punti]:

6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 6\sin^2 x + \sin x & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare a_0, a_1, b_1, b_2.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy $y' = \frac{y+2}{2\log(y+2)}$, $y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino poi monotonia, convessità e flessi della soluzione al variare di y_0. L'intervallo massimale può essere illimitato a destra per qualche valore di y_0?

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Dopo aver determinato la soluzione del problema di Cauchy $y' = \frac{y+2}{2\log(y+2)}$, $y(0) = 0$, verificare se l'intervallo massimale è illimitato a destra. Può essere illimitato a sinistra? Risolvere il problema di Cauchy con la condizione $y(0) = -\frac{3}{2}$ e confrontare la situazione con il caso precedente.

. . . .

Risposta [5 punti]:
