---

Cognome e nome ............................... Firma ................ Matricola ................

Corso di Laurea: ♢ MECLT ♢ MATLT ♢ AUTLT ♢ EDIQQ ♢ EDILMU

---

**Istruzioni**

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $\beta > 1$. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{\beta-1}y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Sia $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; determinare al variare di $\beta$ se esiste la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ e, in caso affermativo, calcolarla.

.......................................................................................

**Risposta [4 punti]:**

---

2. Si consideri la funzione $g(x,y) = \sqrt{x+y}$ nel suo dominio $D$. Si consideri inoltre l'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4x + y^2 \leq 0\}.$$

Calcolare il minimo $m$ ed il massimo $M$ di $g$ su $A \cap D$ specificando in quali punti essi vengono assunti.

.......................................................................................

**Risposta [Calcolo di $m$ e punti di minimo 2 punti, calcolo di $M$ e punti di massimo 2 punti]:**

---

3. Sia $\Gamma$ la curva data da $\vec{r}(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{\cos\tau}{\tau^2}\, d\tau\, \vec{i}_1 - \int_1^t \frac{\sin\tau}{\tau^2}\, d\tau\, \vec{i}_2$ con $1 \leq t \leq 7$. Calcolare la lunghezza di $\Gamma$.

.......................................................................................

**Risposta [3 punti]:**

---

4. Calcolare l'integrale di superficie $\displaystyle\iint_S \frac{2y^3x}{\sqrt{1+z^2}}\,dS$, dove $S$ è la superficie di rappresentazione parametrica $\vec{r}(u,v) = u\cos v\,\vec{i} + u\sin v\,\vec{j} + e^{-u}\vec{k}$ con $-1 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Risposta [4 punti]:**

---

5. Al variare di $\alpha \geq 0$, studiare la convergenza puntuale della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\exp(n^2(x^2-4))}{n^{2\alpha}\log n}$. Determinare gli intervalli di convergenza totale nei casi in cui, rispettivamente, $\alpha \in [0, \frac{1}{4})$ e $\alpha \in (\frac{3}{2}, +\infty)$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Risposta [5 punti]:**

---

6. Si consideri il problema di Cauchy $y' = \arctan(y^2-4)\log^2(3-t)$, $y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente; si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino poi monotonia, limitatezza e asintoti al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Risposta [4 punti]:**

---

7. Risolvere il problema di Cauchy $y'(t) = \dfrac{t^2+2y^2(t)}{ty(t)}$ $\quad y(1) = 1$. *(suggerimento: porre $z = y/t\ldots$)*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Risposta [4 punti]:**

---

8. Sia $\Gamma$ il bordo del rettangolo $R = [0,3]\times[0,2]$ percorso **due volte** in senso antiorario. Si calcoli

$$I = \int_\Gamma (x^2y + \cos^3 x)dx + y\arctan x dy$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Risposta [4 punti]:**

---

---

1. Sia $\beta > 1$. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{\beta-1}y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Sia $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; determinare al variare di $\beta$ se esiste la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ e, in caso affermativo, calcolarla.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Risposta [4 punti]:**

---

2. Si consideri la funzione $g(x,y) = \sqrt{x+y}$ nel suo dominio $D$. Si consideri inoltre l'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4x + y^2 \leq 0\}.$$

Calcolare il minimo $m$ ed il massimo $M$ di $g$ su $A \cap D$ specificando in quali punti essi vengono assunti.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Risposta [Calcolo di $m$ e punti di minimo 2 punti, calcolo di $M$ e punti di massimo 2 punti]:**

---

3. Sia $\Gamma$ la curva data da $\vec{r}(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{\cos\tau}{\tau^2}\, d\tau\, \vec{i}_1 - \int_1^t \frac{\sin\tau}{\tau^2}\, d\tau\, \vec{i}_2$ con $1 \leq t \leq 7$. Calcolare la lunghezza di $\Gamma$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Risposta [3 punti]:**

---

4. Calcolare l'integrale di superficie $\displaystyle\iint_S \frac{2y^3x}{\sqrt{1+z^2}}\, dS$, dove $S$ è la superficie di rappresentazione parametrica $\vec{r}(u,v) = u\cos v\,\vec{i} + u\sin v\,\vec{j} + e^{-u}\vec{k}$ con $-1 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Risposta [4 punti]:**

---

5. Al variare di $\alpha \geq 0$, studiare la convergenza puntuale della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\exp(n^2(x^2-4))}{n^{2\alpha}\log n}$. Determinare gli intervalli di convergenza totale nei casi in cui, rispettivamente, $\alpha \in [0, \frac{1}{4})$ e $\alpha \in (\frac{3}{2}, +\infty)$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Risposta [5 punti]:**

---

6. Si consideri il problema di Cauchy $y' = \arctan(y^2 - 4) \log^2(3 - t)$, $y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente; si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino poi monotonia, limitatezza e asintoti al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Risposta [4 punti]:**

---

7. Risolvere il problema di Cauchy $y'(t) = \dfrac{t^2 + 2y^2(t)}{ty(t)} \quad y(1) = 1$. *(suggerimento: porre* $z = y/t \ldots$*)*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Risposta [4 punti]:**

---

8. Sia $\Gamma$ il bordo del rettangolo $R = [0, 3] \times [0, 2]$ percorso **due volte** in senso antiorario. Si calcoli

$$I = \int_\Gamma (x^2 y + \cos^3 x)dx + y \arctan x dy$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Risposta [4 punti]:**

---