---

Cognome ........................................ Nome ........................................

Matricola ........................................ Firma ........................................

---

**Istruzioni**

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 7 e 8 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
6. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{e^{xy^2}-1}{x^2+7y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Discutere la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità in $(0,0)$.

...............................................................................................

**Risposta [5 punti]:**

---

2. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + y^3 - \alpha y^2 + 3y + 1$$

ammette un unico punto stazionario e classificarlo.

...............................................................................................

**Risposta [4 punti]:**

---

3. Calcolare la lunghezza della curva $\Gamma$ di rappresentazione parametrica

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{t^3}{3} + 2t\right)\vec{i} + \sqrt{3}\left(\frac{t^3}{3} - 2t\right)\vec{j} + \sqrt{6}\,t^2\,\vec{k}, \quad t \in [0, \sqrt{3}]\,.$$

...............................................................................................

**Risposta [4 punti]:**

---

4. Calcolare il volume del solido $Q$ definito da $\quad Q := \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \, : 2(x^2 + y^2) \leq z \leq 4 + 4y\}$.

....................................................................................................

**Risposta [4 punti]:**

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \left(\frac{x}{7}\right)^{2n-1} \arctan\left(\left(\frac{x}{7}\right)^{2n}\right), \quad x \in [0, +\infty[\,.$$

Si determini l'insieme $I$ di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in $I$ ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi. Discutere se vale la tesi del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale su $[0, 7]$.

....................................................................................................

**Risposta [5 punti]:**

---

6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo $2\pi$, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = x\sin(2x) + 1$, e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti $a_0$, $a_1$, $b_1$, $a_2$. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della sua serie di Fourier, sulla base delle caratteristiche di $f$. Calcolare $S(\frac{\pi}{4})$.

....................................................................................................

**Risposta [5 punti]:**

---

7. Dato il campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y) = [2\sinh y - xy]\,\vec{i} + [2x\cosh y + 2xy]\,\vec{j}$$

calcolare l'integrale curvilineo $\oint_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, dove $\Gamma$ è la curva chiusa bordo del quarto di corona circolare, formata dal segmento congiungente $(1, 0)$ e $(2, 0)$, dall'arco di circonferenza di centro $(0, 0)$, raggio 2, dal segmento congiungente $(0, 2)$ e $(0, 1)$ e dall'arco di circonferenza di centro $(0, 0)$, raggio 1, percorsa in senso antiorario.

....................................................................................................

**Risposta [5 punti]:**

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 7\sin y(\sin y - 1) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in [0, 2\pi]$, discutere se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in [0, 2\pi]$, la monotonia, asintoti e flessi delle soluzioni.

....................................................................................................

**Risposta [5 punti]:**

---

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{e^{xy^2}-1}{x^2+7y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Discutere la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità in $(0,0)$.

........................................................................................................

**Risposta [5 punti]:**

---

2. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + y^3 - \alpha y^2 + 3y + 1$$

ammette un unico punto stazionario e classificarlo.

........................................................................................................

**Risposta [4 punti]:**

---

3. Calcolare la lunghezza della curva $\Gamma$ di rappresentazione parametrica

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{t^3}{3} + 2t\right)\vec{i} + \sqrt{3}\left(\frac{t^3}{3} - 2t\right)\vec{j} + \sqrt{6}\,t^2\,\vec{k}, \quad t \in [0, \sqrt{3}]\,.$$

........................................................................................................

**Risposta [4 punti]:**

---

4. Calcolare il volume del solido $Q$ definito da $\quad Q := \{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2(x^2+y^2) \leq z \leq 4+4y\}$.

........................................................................................................

**Risposta [4 punti]:**

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \left(\frac{x}{7}\right)^{2n-1} \arctan\left(\left(\frac{x}{7}\right)^{2n}\right)\,, \quad x \in [0, +\infty[\,.$$

Si determini l'insieme $I$ di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in $I$ ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi. Discutere se vale la tesi del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale su $[0,7]$.

........................................................................................................

**Risposta [5 punti]:**

---

6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo $2\pi$, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = x\sin(2x) + 1$, e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti $a_0$, $a_1$, $b_1$, $a_2$. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della sua serie di Fourier, sulla base delle caratteristiche di $f$. Calcolare $S(\frac{\pi}{4})$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Risposta [5 punti]:**

---

7. Dato il campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y) = [2\sinh y - xy]\,\vec{i} + [2x\cosh y + 2xy]\,\vec{j}$$

calcolare l'integrale curvilineo $\oint_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, dove $\Gamma$ è la curva chiusa bordo del quarto di corona circolare, formata dal segmento congiungente $(1, 0)$ e $(2, 0)$, dall'arco di circonferenza di centro $(0, 0)$, raggio 2, dal segmento congiungente $(0, 2)$ e $(0, 1)$ e dall'arco di circonferenza di centro $(0, 0)$, raggio 1, percorsa in senso antiorario.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Risposta [5 punti]:**

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 7\sin y(\sin y - 1) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in [0, 2\pi]$, discutere se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in [0, 2\pi]$, la monotonia, asintoti e flessi delle soluzioni.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Risposta [5 punti]:**

---