Cognome e nome . . . . Firma . . . . Matricola . . . .

Corso di Laurea: ◊ EDIQQ ◊ EDILMU

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 7 e 8 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
6. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} |x|^{7\alpha} \log(x^2+y^2) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

2. Siano T il **bordo** di $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq 0,\, y - x \geq 0,\, y + |x| \leq 6\}$ e

$$g(x,y) = \frac{1}{9}[x^2 + (y-3)^2]\,.$$

Determinare $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ ed i punti in cui sono assunti.

. . . .

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 3 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

---

3. Calcolare l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\Gamma \left[1 + 2\,(y/3)^2\right]^{-\frac{3}{2}} ds$ dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica

$$\vec{r}(t) = \frac{1-3t^2}{2}\vec{i} + 3t\vec{j} + \frac{1+3t^2}{2}\vec{k}, \qquad t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\,.$$

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_D 3z\,dxdydz$$

dove $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \sqrt{x^2+2y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2}\right\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni $f_n(x) = x^{2n-1}\log\left(x^{2n}+2\right)$, $\qquad x \in \mathbb{R}, n \ge 1$.

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

6. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n!)^{3\alpha} \frac{x^{2n+3}}{(2n+2)!},$$

si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcolarne la somma nel caso $\alpha = 0$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Dopo aver determinato per quale valore del parametro reale β il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left[\frac{\beta x^{13}y^8}{1+x^{14}} + 8x^7 \arctan y\right]\overrightarrow{i} + \left[8y^7\log(x^{14}+1) + \frac{x^8}{1+y^2}\right]\overrightarrow{j}$$

è conservativo nel suo dominio, per tale valore di β calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, essendo Γ la curva $y = x^3$, $\;0 \le x \le 1$, percorsa nel verso che va dal punto $(0,0)$ al punto $(1,1)$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan(y^2 - 49) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie.. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x,y) = \begin{cases} |x|^{7\alpha} \log(x^2+y^2) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$
studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Siano T il **bordo** di $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq 0,\, y - x \geq 0,\, y + |x| \leq 6\}$ e
$$g(x,y) = \frac{1}{9}[x^2 + (y-3)^2]\,.$$
Determinare $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 3 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

---

3. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \left[1 + 2\,(y/3)^2\right]^{-\frac{3}{2}} ds$ dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica
$$\vec{r}(t) = \frac{1-3t^2}{2}\vec{i} + 3t\vec{j} + \frac{1+3t^2}{2}\vec{k}, \qquad t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\,.$$

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale triplo
$$\iiint_D 3z\, dxdydz$$
dove $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \sqrt{x^2+2y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2}\right\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni $f_n(x) = x^{2n-1} \log\left(x^{2n}+2\right)\,, \qquad x \in \mathbb{R}, n \geq 1.$

   Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

....

Risposta [5 punti]:

---

6. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n!)^{3\alpha} \frac{x^{2n+3}}{(2n+2)!},$$

si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcolarne la somma nel caso $\alpha = 0$.

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Dopo aver determinato per quale valore del parametro reale β il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left[\frac{\beta x^{13} y^8}{1+x^{14}} + 8x^7 \arctan y\right] \overrightarrow{i} + \left[8y^7 \log(x^{14}+1) + \frac{x^8}{1+y^2}\right] \overrightarrow{j}$$

è conservativo nel suo dominio, per tale valore di β calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, essendo Γ la curva $y = x^3$, $0 \le x \le 1$, percorsa nel verso che va dal punto $(0,0)$ al punto $(1,1)$.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan(y^2 - 49) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie.. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:
