
Cognome .... Nome ....

Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 7 e 8 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
6. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{\alpha-1}\log(x^2+y^2) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia T l'insieme definito da $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \leq x \leq 1\,; 0 \leq y \leq 1-x^2\}$ e sia $f(x,y) = x^2(y+\frac{1}{3})$. Determinare $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 3 punti]:

---

3. Determinare per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y) = (\alpha x(e^x+e^y) + \beta(x^2+y^2)e^x)\,\overrightarrow{i} + (2y(e^x-e^y) + \beta(x^2-y^2)e^y)\,\overrightarrow{j}$$

è conservativo. Per tali valori di α e β determinare il potenziale φ tale che vale 0 in $(0,0)$ e calcolarlo in $(2,0)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \frac{2xe^y}{y}\,dxdy$$

dove T è la regione limitata del semipiano $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq \frac{1}{2}\}$ racchiusa dalle curve di equazione $x = \sqrt{y}$ e $x = y$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione di funzioni definita da

$$f_n(x) = \frac{1 - e^{-n(x-1)}}{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

Risposta [4 punti]:

---

6. Siano dati $\alpha \geq 0$ e la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-2\alpha n}}{n} (\cos x)^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Discutere la convergenza puntuale al variare di $\alpha \geq 0$; studiare la convergenza uniforme solo per $x \in [0, \pi]$ (può essere utile porre $\cos x = t$).

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

7. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma 2z\sqrt{2(x^2+y^2)+4}\,ds$ dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = e^t \cos t\,\vec{i} + e^t \sin t\,\vec{j} + 2\,t\,\vec{k}, \qquad t \in [0,1]$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2(y-3) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{\alpha-1}\log(x^2+y^2) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia T l'insieme definito da $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \le x \le 1\,; 0 \le y \le 1-x^2\}$ e sia $f(x,y) = x^2(y+\frac{1}{3})$. Determinare $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ ed i punti in cui sono assunti.

. . . .

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 3 punti]:

---

3. Determinare per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y) = (\alpha x(e^x+e^y) + \beta(x^2+y^2)e^x)\,\overrightarrow{i} + (2y(e^x-e^y) + \beta(x^2-y^2)e^y)\,\overrightarrow{j}$$

è conservativo. Per tali valori di α e β determinare il potenziale φ tale che vale 0 in $(0,0)$ e calcolarlo in $(2,0)$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \frac{2xe^y}{y}\,dxdy$$

dove T è la regione limitata del semipiano $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \ge \frac{1}{2}\}$ racchiusa dalle curve di equazione $x = \sqrt{y}$ e $x = y$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione di funzioni definita da

$$f_n(x) = \frac{1-e^{-n(x-1)}}{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

Risposta [4 punti]:

---

6. Siano dati $\alpha \geq 0$ e la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-2\alpha n}}{n} (\cos x)^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Discutere la convergenza puntuale al variare di $\alpha \geq 0$; studiare la convergenza uniforme solo per $x \in [0, \pi]$ (può essere utile porre $\cos x = t$).

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

7. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma 2z\sqrt{2(x^2+y^2)+4}\, ds$ dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = e^t \cos t\, \vec{i} + e^t \sin t\, \vec{j} + 2\, t\, \vec{k}, \qquad t \in [0, 1]$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2(y-3) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

. . . .

Risposta [5 punti]:
