Cognome e nome ............................................................. Firma ................................ Matricola ................................

Corso di Laurea: $\diamondsuit$ EDILMU $\diamondsuit$ EDIQQ

**Istruzioni**

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Gli esercizi 4 e 5 sono in **ALTERNATIVA**.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.

---

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Sia data la seguente successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita in tutto $\mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \arctan \frac{x}{n^\alpha}\,.$$

Al variare di $\alpha$, si studi (eventualmente anche in sottointervalli) la convergenza puntuale in $\mathbb{R}$ e uniforme in $[0, +\infty[$.

**Risposta :**

---

2. Si studi, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{2n}}{(n!)^\beta}\,;$$

si calcoli, se possibile, la somma nei casi $\beta = 0$ e $\beta = 1$.

**Risposta :**

---

3. Si studi la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{2+\cos^2 x}\right)^{n/2} (\sin x)^n$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$ e si calcoli la sua funzione somma.

**Risposta :**

---

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo $2\pi$, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 1 - 2x$ e prolungata per periodicità; si calcolino i suoi coefficienti di Fourier.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Risposta :**

---

5. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \arctan y \\ y(0) = y_0 \,. \end{cases}$$

Discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza ed unicità (locale e globale); studiare monotonia, concavità e asintoti delle soluzioni al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Risposta :**

---

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Sia data la seguente successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita in tutto $\mathbb{R}$:
$$f_n(x) = \arctan \frac{x}{n^\alpha}\,.$$
Al variare di $\alpha$, si studi (eventualmente anche in sottointervalli) la convergenza puntuale in $\mathbb{R}$ e uniforme in $[0, +\infty[$.

   **Risposta :**

---

2. Si studi, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(x+1)^{2n}}{(n!)^\beta}\,;$$
si calcoli, se possibile, la somma nei casi $\beta = 0$ e $\beta = 1$.

   **Risposta :**

---

3. Si studi la convergenza della serie di funzioni
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{3}{2+\cos^2 x}\right)^{n/2} (\sin x)^n$$
nell'intervallo $[0, 2\pi]$ e si calcoli la sua funzione somma.

   **Risposta :**

---

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo $2\pi$, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 1 - 2x$ e prolungata per periodicità; si calcolino i suoi coefficienti di Fourier.

   ..........................................................................................

   **Risposta :**

---

5. Si consideri il seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = y \arctan y \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$
Discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza ed unicità (locale e globale); studiare monotonia, concavità e asintoti delle soluzioni al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$

   ..........................................................................................

   **Risposta :**

---