ANALISI MATEMATICA II- 10 settembre 2010 . Il numero del compito è dato dal secondo addendo costante della funzione g nell'esercizio 2.

COMPITO 1

1. versore $\vec{v} = (v_1, v_2)$, $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 7v_2$ se $\vec{v} \neq (0,1)$ e $\nabla f(0,0) = \vec{0}$. Se f fosse differenziabile in $(0,0)$, dovrebbe valere $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{v} = 0$, in contraddizione con quanto stabilito prima, quindi f non può essere differenziabile in $(0,0)$.
2. $m = e^{-8} + 1$ in $(2,2)$ e $M = 2$ su tutta la frontiera di D.
3. $\alpha = \pm\sqrt{8}$, un potenziale $\varphi(x,y) = x^8 y^2 + y^8 x^2$.
4. $\pi(1 - \cos 7)$
5. converge puntualmente in $[0, +\infty[$ a $f(x)$ con $f(x) = 0$ se $x \in [0,1[$, $f(1) = \frac{7}{8}$, $f(x) = 7$ se $x \in]1, +\infty[$. Convergenza uniforme in $[0,b]$ con $0 < b < 1$ e in $[a, +\infty[$ con $a > 1$.
6. $t(e^y - 2)$ è C^1 ma non sublineare, quindi esistenza ed unicità locali. Le soluzioni sono tutte pari. $u(t) \equiv \log 2$ stazionaria. Se $y_0 > \log 2$ crescente per $t > 0$, se $y_0 < \log 2$ crescente per $t < 0$. L'intervallo massimale è tutto $\mathbb{R}$ se $y_0 < \log 2$, in quanto $e^u - 2$ rimane limitato per il comportamento dell'esponenziale ($e^{u(t)} \leq e^{y_0}$), mentre, se $y_0 > \log 2$, la soluzione esplode (quindi due asintoti verticali) per la illimitatezza dell'esponenziale.
7. $y(t) = 4[(t^2 + 1)\arctan t - t]$.
8. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ ad f perché è C^1 a tratti; con l'uguaglianza di Parseval $\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n^2 + b_n^2] = \frac{1}{2\pi}(1 - e^{-4\pi})$.

COMPITO 2

1. versore $\vec{v} = (v_1, v_2)$, $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 6v_2$ se $\vec{v} \neq (0,1)$ e $\nabla f(0,0) = \vec{0}$. Se f fosse differenziabile in $(0,0)$, dovrebbe valere $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{v} = 0$, in contraddizione con quanto stabilito prima, quindi f non può essere differenziabile in $(0,0)$.
2. $m = e^{-27} + 2$ in $(3,3)$ e $M = 3$ su tutta la frontiera di D.
3. $\alpha = \pm\sqrt{7}$, un potenziale $\varphi(x,y) = x^7 y^2 + y^7 x^2$.
4. $\pi(1 - \cos 6)$
5. converge puntualmente in $[0, +\infty[$ a $f(x)$ con $f(x) = 0$ se $x \in [0,1[$, $f(1) = \frac{6}{7}$, $f(x) = 6$ se $x \in]1, +\infty[$. Convergenza uniforme in $[0,b]$ con $0 < b < 1$ e in $[a, +\infty[$ con $a > 1$.
6. $t(e^y - 3)$ è C^1 ma non sublineare, quindi esistenza ed unicità locali. Le soluzioni sono tutte pari. $u(t) \equiv \log 3$ stazionaria. Se $y_0 > \log 3$ crescente per $t > 0$, se $y_0 < \log 3$ crescente per $t < 0$. L'intervallo massimale è tutto $\mathbb{R}$ se $y_0 < \log 3$, in quanto $e^u - 3$ rimane limitato per il comportamento dell'esponenziale ($e^{u(t)} \leq e^{y_0}$), mentre, se $y_0 > \log 3$, la soluzione esplode (quindi due asintoti verticali) per la illimitatezza dell'esponenziale.
7. $y(t) = 6[(t^2 + 1)\arctan t - t]$.
8. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ ad f perché è C^1 a tratti; con l'uguaglianza di Parseval $\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n^2 + b_n^2] = \frac{1}{3\pi}(1 - e^{-6\pi})$.

COMPITO 3

1. versore $\vec{v}=(v_1,v_2)$, $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=5v_2$ se $\vec{v}\neq(0,1)$ e $\nabla f(0,0)=\vec{0}$. Se f fosse differenziabile in $(0,0)$, dovrebbe valere $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot\vec{v}=0$, in contraddizione con quanto stabilito prima, quindi f non può essere differenziabile in $(0,0)$.
2. $m=e^{-64}+3$ in $(4,4)$ e $M=4$ su tutta la frontiera di D.
3. $\alpha=\pm\sqrt{6}$, un potenziale $\varphi(x,y)=x^6y^2+y^6x^2$.
4. $\pi(1-\cos 5)$
5. converge puntualmente in $[0,+\infty[$ a $f(x)$ con $f(x)=0$ se $x\in[0,1[$, $f(1)=\frac{5}{6}$, $f(x)=5$ se $x\in]1,+\infty[$. Convergenza uniforme in $[0,b]$ con $0<b<1$ e in $[a,+\infty[$ con $a>1$.
6. $t(e^y-4)$ è C^1 ma non sublineare, quindi esistenza ed unicità locali. Le soluzioni sono tutte pari. $u(t)\equiv\log 4$ stazionaria. Se $y_0>\log 4$ crescente per $t>0$, se $y_0<\log 4$ crescente per $t<0$. L'intervallo massimale è tutto $\mathbb{R}$ se $y_0<\log 4$, in quanto e^u-4 rimane limitato per il comportamento dell'esponenziale ($e^{u(t)}\leq e^{y_0}$), mentre, se $y_0>\log 4$, la soluzione esplode (quindi due asintoti verticali) per la illimitatezza dell'esponenziale.
7. $y(t)=8[(t^2+1)\arctan t-t]$.
8. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ ad f perché è C^1 a tratti; con l'uguaglianza di Parseval $\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n^2+b_n^2]=\frac{1}{4\pi}(1-e^{-8\pi})$.

COMPITO 4

1. versore $\vec{v}=(v_1,v_2)$, $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=4v_2$ se $\vec{v}\neq(0,1)$ e $\nabla f(0,0)=\vec{0}$. Se f fosse differenziabile in $(0,0)$, dovrebbe valere $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot\vec{v}=0$, in contraddizione con quanto stabilito prima, quindi f non può essere differenziabile in $(0,0)$.
2. $m=e^{-125}+4$ in $(5,5)$ e $M=5$ su tutta la frontiera di D.
3. $\alpha=\pm\sqrt{5}$, un potenziale $\varphi(x,y)=x^5y^2+y^5x^2$.
4. $\pi(1-\cos 4)$
5. converge puntualmente in $[0,+\infty[$ a $f(x)$ con $f(x)=0$ se $x\in[0,1[$, $f(1)=\frac{4}{5}$, $f(x)=4$ se $x\in]1,+\infty[$. Convergenza uniforme in $[0,b]$ con $0<b<1$ e in $[a,+\infty[$ con $a>1$.
6. $t(e^y-5)$ è C^1 ma non sublineare, quindi esistenza ed unicità locali. Le soluzioni sono tutte pari. $u(t)\equiv\log 5$ stazionaria. Se $y_0>\log 5$ crescente per $t>0$, se $y_0<\log 5$ crescente per $t<0$. L'intervallo massimale è tutto $\mathbb{R}$ se $y_0<\log 5$, in quanto e^u-5 rimane limitato per il comportamento dell'esponenziale ($e^{u(t)}\leq e^{y_0}$), mentre, se $y_0>\log 5$, la soluzione esplode (quindi due asintoti verticali) per la illimitatezza dell'esponenziale.
7. $y(t)=10[(t^2+1)\arctan t-t]$.
8. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ ad f perché è C^1 a tratti; con l'uguaglianza di Parseval $\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n^2+b_n^2]=\frac{1}{5\pi}(1-e^{-10\pi})$.

COMPITO 5

1. versore $\vec{v}=(v_1,v_2)$, $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=3v_2$ se $\vec{v}\neq(0,1)$ e $\nabla f(0,0)=\vec{0}$. Se f fosse differenziabile in $(0,0)$, dovrebbe valere $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot\vec{v}=0$, in contraddizione con quanto stabilito prima, quindi f non può essere differenziabile in $(0,0)$.

2. $m = e^{-216} + 5$ in $(6, 6)$ e $M = 6$ su tutta la frontiera di D.

3. $\alpha = \pm\sqrt{4}$, un potenziale $\varphi(x, y) = x^4y^2 + y^4x^2$.

4. $\pi(1 - \cos 3)$

5. converge puntualmente in $[0, +\infty[$ a $f(x)$ con $f(x) = 0$ se $x \in [0, 1[$, $f(1) = \frac{3}{4}$, $f(x) = 3$ se $x \in]1, +\infty[$. Convergenza uniforme in $[0, b]$ con $0 < b < 1$ e in $[a, +\infty[$ con $a > 1$.

6. $t(e^y - 6)$ è C^1 ma non sublineare, quindi esistenza ed unicità locali. Le soluzioni sono tutte pari. $u(t) \equiv \log 6$ stazionaria. Se $y_0 > \log 6$ crescente per $t > 0$, se $y_0 < \log 6$ crescente per $t < 0$. L'intervallo massimale è tutto $\mathbb{R}$ se $y_0 < \log 6$, in quanto $e^u - 6$ rimane limitato per il comportamento dell'esponenziale ($e^{u(t)} \leq e^{y_0}$), mentre, se $y_0 > \log 6$, la soluzione esplode (quindi due asintoti verticali) per la illimitatezza dell'esponenziale.

7. $y(t) = 12[(t^2 + 1)\arctan t - t]$.

8. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ ad f perché è C^1 a tratti; con l'uguaglianza di Parseval $\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n^2 + b_n^2] = \frac{1}{6\pi}(1 - e^{-12\pi})$.

COMPITO 6

1. versore $\vec{v} = (v_1, v_2)$, $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = 2v_2$ se $\vec{v} \neq (0, 1)$ e $\nabla f(0, 0) = \vec{0}$. Se f fosse differenziabile in $(0, 0)$, dovrebbe valere $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot \vec{v} = 0$, in contraddizione con quanto stabilito prima, quindi f non può essere differenziabile in $(0, 0)$.

2. $m = e^{-343} + 6$ in $(7, 7)$ e $M = 7$ su tutta la frontiera di D.

3. $\alpha = \pm\sqrt{3}$, un potenziale $\varphi(x, y) = x^3y^2 + y^3x^2$.

4. $\pi(1 - \cos 2)$

5. converge puntualmente in $[0, +\infty[$ a $f(x)$ con $f(x) = 0$ se $x \in [0, 1[$, $f(1) = \frac{2}{3}$, $f(x) = 2$ se $x \in]1, +\infty[$. Convergenza uniforme in $[0, b]$ con $0 < b < 1$ e in $[a, +\infty[$ con $a > 1$.

6. $t(e^y - 7)$ è C^1 ma non sublineare, quindi esistenza ed unicità locali. Le soluzioni sono tutte pari. $u(t) \equiv \log 7$ stazionaria. Se $y_0 > \log 7$ crescente per $t > 0$, se $y_0 < \log 7$ crescente per $t < 0$. L'intervallo massimale è tutto $\mathbb{R}$ se $y_0 < \log 7$, in quanto $e^u - 7$ rimane limitato per il comportamento dell'esponenziale ($e^{u(t)} \leq e^{y_0}$), mentre, se $y_0 > \log 7$, la soluzione esplode (quindi due asintoti verticali) per la illimitatezza dell'esponenziale.

7. $y(t) = 14[(t^2 + 1)\arctan t - t]$.

8. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ ad f perché è C^1 a tratti; con l'uguaglianza di Parseval $\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n^2 + b_n^2] = \frac{1}{7\pi}(1 - e^{-14\pi})$.
