ANALISI MATEMATICA II- 11 GENNAIO 2017 - C.d.L.: EDIQQ, EDILMU.

Il NUMERO della FILA è l'intero diminuito di 1 del radicando del testo dell'esercizio n° 5.

COMPITO 1

1. f è continua in $(0,0)$; esistono tutte le derivate direzionali e $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = e^7 v_1 v_2^2$, quindi le derivate parziali sono nulle. Verificando che $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) \neq \nabla f(0,0) \cdot \vec{v}$ o mediante la definizione, si mostra che f non è differenziabile in $(0,0)$.
2. $m = -4$ assunto in $(-2,0)$; $M = 2\sqrt{5}$ assunto in $(4/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.
3. 15π
4. 8π
5. f_n converge puntualmente (ma non uniformemente) in $[0,+\infty[$ a f con $f(x) \equiv 0$ per $x > 0$, $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; converge uniformemente in ogni intervallo $[a,+\infty[$ con $a > 0$. La tesi del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale vale, verificando direttamente.
6. Per $\alpha > 0$ la serie converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$; per $\alpha = 0$ la serie converge puntualmente in $[-1,1[$; per $\alpha < 0$ la serie converge solo in $x = 0$. $S(x) = e^x(x-1)+1$.
7. $\overrightarrow{F}$ è un gradiente, un potenziale $\varphi(x,y) = y^8 \log(y^2+e^{7x^2})$, quindi $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma = \varphi(0,1) - \varphi(0,0) = \log 2$
8. $f(t,y) = \arctan(y^2-3) - \frac{\pi}{4}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = \pm 2$ soluzioni stazionarie; se $y_0 < -2$ o $y_0 > 2$, soluzione u crescente; se $-2 < y_0 < 2$ soluzione u decrescente. Se $-2 < y_0 < 2$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 0$), convessa per $t > t^*$; se $y_0 < -2$, la soluzione u è concava, se $y_0 > 2$, convessa. Se $y_0 < -2$, $\lim_{t\to-\infty} u(t) = -\infty$ e $u = -2$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $-2 < y_0 < 2$, $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = \mp 2$ e $u = \mp 2$ è asintoto orizzontale per $t \to \pm\infty$; se $y_0 > 2$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$ e $u = 2$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.

COMPITO 2

1. f è continua in $(0,0)$; esistono tutte le derivate direzionali e $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = e^6 v_1 v_2^2$, quindi le derivate parziali sono nulle. Verificando che $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) \neq \nabla f(0,0) \cdot \vec{v}$ o mediante la definizione, si mostra che f non è differenziabile in $(0,0)$.
2. $m = -6$ assunto in $(-3,0)$; $M = 3\sqrt{5}$ assunto in $(6/\sqrt{5}, 3/\sqrt{5})$.
3. 13π
4. 27π
5. f_n converge puntualmente (ma non uniformemente) in $[0,+\infty[$ a f con $f(x) \equiv 0$ per $x > 0$, $f(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; converge uniformemente in ogni intervallo $[a,+\infty[$ con $a > 0$. La tesi del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale vale, verificando direttamente.
6. Per $\alpha > 0$ la serie converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$; per $\alpha = 0$ la serie converge puntualmente in $[-1,1[$; per $\alpha < 0$ la serie converge solo in $x = 0$. $S(x) = e^x(x-1)+1$.
7. $\overrightarrow{F}$ è un gradiente, un potenziale $\varphi(x,y) = y^7 \log(y^2+e^{6x^2})$, quindi $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma = \varphi(0,1) - \varphi(0,0) = \log 2$

8. $f(t,y) = \arctan(y^2-8) - \frac{\pi}{4}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = \pm 3$ soluzioni stazionarie; se $y_0 < -3$ o $y_0 > 3$, soluzione u crescente; se $-3 < y_0 < 3$ soluzione u decrescente. Se $-3 < y_0 < 3$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 0$), convessa per $t > t^*$; se $y_0 < -3$, la soluzione u è concava, se $y_0 > 3$, convessa. Se $y_0 < -3$, $\lim_{t\to-\infty} u(t) = -\infty$ e $u = -3$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $-3 < y_0 < 3$, $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = \mp 3$ e $u = \mp 3$ è asintoto orizzontale per $t \to \pm\infty$; se $y_0 > 3$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$ e $u = 3$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.

COMPITO 3

1. f è continua in $(0,0)$; esistono tutte le derivate direzionali e $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = e^5 v_1 v_2^2$, quindi le derivate parziali sono nulle. Verificando che $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) \neq \nabla f(0,0) \cdot \vec{v}$ o mediante la definizione, si mostra che f non è differenziabile in $(0,0)$.

2. $m = -8$ assunto in $(-4,0)$; $M = 4\sqrt{5}$ assunto in $(8/\sqrt{5}, 4/\sqrt{5})$.

3. 11π

4. 64π

5. f_n converge puntualmente (ma non uniformemente) in $[0,+\infty[$ a f con $f(x) \equiv 0$ per $x > 0$, $f(0) = \frac{1}{\sqrt{4}}$; converge uniformemente in ogni intervallo $[a,+\infty[$ con $a > 0$. La tesi del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale vale, verificando direttamente.

6. Per $\alpha > 0$ la serie converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$; per $\alpha = 0$ la serie converge puntualmente in $[-1,1[$; per $\alpha < 0$ la serie converge solo in $x = 0$. $S(x) = e^x(x-1)+1$.

7. $\overrightarrow{F}$ è un gradiente, un potenziale $\varphi(x,y) = y^6 \log(y^2 + e^{5x^2})$, quindi $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma = \varphi(0,1) - \varphi(0,0) = \log 2$

8. $f(t,y) = \arctan(y^2-15) - \frac{\pi}{4}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = \pm 4$ soluzioni stazionarie; se $y_0 < -4$ o $y_0 > 4$, soluzione u crescente; se $-4 < y_0 < 4$ soluzione u decrescente. Se $-4 < y_0 < 4$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 0$), convessa per $t > t^*$; se $y_0 < -4$, la soluzione u è concava, se $y_0 > 4$, convessa. Se $y_0 < -4$, $\lim_{t\to-\infty} u(t) = -\infty$ e $u = -4$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $-4 < y_0 < 4$, $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = \mp 4$ e $u = \mp 4$ è asintoto orizzontale per $t \to \pm\infty$; se $y_0 > 4$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$ e $u = 4$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.
