ANALISI MATEMATICA II- 13 LUGLIO 2015 - C.d.L.: EDIQQ, EDILMU.

Il numero del compito è dato dal coefficiente di t nella terza componente di $\vec{r}$ nell'esercizio 3.

COMPITO 1

1. f è continua in $(0,0)$; esistono tutte le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ e sono nulle. f è differenziabile in $(0,0)$, ma le derivate parziali non sono continue in $(0,0)$.
2. Gli unici punti stazionari sono $(\pm\sqrt{1/14}, 1/2)$; $(-\sqrt{1/14}, 1/2)$ è punto di minimo relativo e $(\sqrt{1/14}, 1/2)$ è punto di sella.
3. $\frac{1}{6}\left[\left(2e^{4\pi}+1\right)^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}\right]$
4. $8\pi(e^3-1)$
5. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I =]-7,+\infty[$ a f con $f(x)=0$ se $|x|<7$ e $f(x)=\frac{\pi}{2}$ se $x \geq 7$. Converge uniformemente in ogni insieme $[-a,a]$ (con $0<a<7$) e in $[7,+\infty[$.
6. $a_0 = 3(\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi})$, $a_1 = \frac{3}{\pi}(\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi})$, $b_1 = 3(\frac{2}{\pi^2}+\frac{1}{4})$. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è C^1 a tratti. $S(\frac{5\pi}{2}) = S(\frac{\pi}{2}) = 3$.
7. $\beta = 4$, un potenziale $\varphi(x,y) = \log((x-1)^2+y^2)+2e^{x^2y^2}$, quindi $\int_\Gamma \overrightarrow{F}\cdot d\Gamma = \varphi(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) - \varphi(2,0) = 2(e^{\frac{27}{16}}-1)$
8. $f(t,y) = \frac{y^2-4}{y^2+4}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e limitata (quindi sublineare), quindi esistenza ed unicità globali; $u = \pm 2$ soluzioni stazionarie; se $y_0 < -2$ o $y_0 > 2$, soluzione u crescente; se $-2 < y_0 < 2$ soluzione u decrescente. Se $-2 < y_0 < 2$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 0$), convessa per $t > t^*$; se $y_0 < -2$, la soluzione u è concava, se $y_0 > 2$, convessa. Se $y_0 < -2$, $\lim_{t\to-\infty} u(t) = -\infty$ e $u=-2$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $-2 < y_0 < 2$, $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = \mp 2$ e $u = \mp 2$ è asintoto orizzontale per $t \to \pm\infty$; se $y_0 > 2$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$ e $u = 2$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.

COMPITO 2

1. f è continua in $(0,0)$; esistono tutte le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ e sono nulle. f è differenziabile in $(0,0)$, ma le derivate parziali non sono continue in $(0,0)$.
2. Gli unici punti stazionari sono $(\pm\sqrt{1/12}, 1/2)$; $(-\sqrt{1/12}, 1/2)$ è punto di minimo relativo e $(\sqrt{1/12}, 1/2)$ è punto di sella.
3. $\frac{1}{6}\left[\left(2e^{4\pi}+4\right)^{\frac{3}{2}} - 6^{\frac{3}{2}}\right]$
4. $27\pi(e^4-1)$
5. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I =]-6,+\infty[$ a f con $f(x)=0$ se $|x|<6$ e $f(x)=\frac{\pi}{2}$ se $x \geq 6$. Converge uniformemente in ogni insieme $[-a,a]$ (con $0<a<6$) e in $[6,+\infty[$.
6. $a_0 = 5(\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi})$, $a_1 = \frac{5}{\pi}(\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi})$, $b_1 = 5(\frac{2}{\pi^2}+\frac{1}{4})$. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è C^1 a tratti. $S(\frac{9\pi}{2}) = S(\frac{\pi}{2}) = 5$.

7. $\beta = 5$, un potenziale $\varphi(x,y) = \log((x-1)^2+y^2)+3e^{x^2y^2}$, quindi $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma = \varphi(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) - \varphi(2,0) = 3(e^{\frac{27}{16}} - 1)$

8. $f(t,y) = \frac{y^2-9}{y^2+9}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e limitata (quindi sublineare), quindi esistenza ed unicità globali; $u = \pm 3$ soluzioni stazionarie; se $y_0 < -3$ o $y_0 > 3$, soluzione u crescente; se $-3 < y_0 < 3$ soluzione u decrescente. Se $-3 < y_0 < 3$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 0$), convessa per $t > t^*$; se $y_0 < -3$, la soluzione u è concava, se $y_0 > 3$, convessa. Se $y_0 < -3$, $\lim_{t\to-\infty} u(t) = -\infty$ e $u = -3$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $-3 < y_0 < 3$, $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = \mp 3$ e $u = \mp 3$ è asintoto orizzontale per $t \to \pm\infty$; se $y_0 > 3$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$ e $u = 3$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.

COMPITO 3

1. f è continua in $(0,0)$; esistono tutte le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ e sono nulle. f è differenziabile in $(0,0)$, ma le derivate parziali non sono continue in $(0,0)$.

2. Gli unici punti stazionari sono $(\pm\sqrt{1/10}, 1/2)$; $(-\sqrt{1/10}, 1/2)$ è punto di minimo relativo e $(\sqrt{1/10}, 1/2)$ è punto di sella.

3. $\frac{1}{6}\left[\left(2e^{4\pi}+9\right)^{\frac{3}{2}} - 11^{\frac{3}{2}}\right]$

4. $64\pi(e^5 - 1)$

5. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I =]-5, +\infty[$ a f con $f(x) = 0$ se $|x| < 5$ e $f(x) = \frac{\pi}{2}$ se $x \geq 5$. Converge uniformemente in ogni insieme $[-a, a]$ (con $0 < a < 5$) e in $[5, +\infty[$.

6. $a_0 = 7(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi})$, $a_1 = \frac{7}{\pi}(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi})$, $b_1 = 7(\frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{4})$. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è C^1 a tratti. $S(\frac{13\pi}{2}) = S(\frac{\pi}{2}) = 7$.

7. $\beta = 6$, un potenziale $\varphi(x,y) = \log((x-1)^2+y^2)+4e^{x^2y^2}$, quindi $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma = \varphi(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) - \varphi(2,0) = 4(e^{\frac{27}{16}} - 1)$

8. $f(t,y) = \frac{y^2-16}{y^2+16}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e limitata (quindi sublineare), quindi esistenza ed unicità globali; $u = \pm 4$ soluzioni stazionarie; se $y_0 < -4$ o $y_0 > 4$, soluzione u crescente; se $-4 < y_0 < 4$ soluzione u decrescente. Se $-4 < y_0 < 4$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 0$), convessa per $t > t^*$; se $y_0 < -4$, la soluzione u è concava, se $y_0 > 4$, convessa. Se $y_0 < -4$, $\lim_{t\to-\infty} u(t) = -\infty$ e $u = -4$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $-4 < y_0 < 4$, $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = \mp 4$ e $u = \mp 4$ è asintoto orizzontale per $t \to \pm\infty$; se $y_0 > 4$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$ e $u = 4$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.

COMPITO 4

1. f è continua in $(0,0)$; esistono tutte le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ e sono nulle. f è differenziabile in $(0,0)$, ma le derivate parziali non sono continue in $(0,0)$.

2. Gli unici punti stazionari sono $(\pm\sqrt{1/8}, 1/2)$; $(-\sqrt{1/8}, 1/2)$ è punto di minimo relativo e $(\sqrt{1/8}, 1/2)$ è punto di sella.

3. $\frac{1}{6}\left[\left(2e^{4\pi}+16\right)^{\frac{3}{2}} - 18^{\frac{3}{2}}\right]$

4. $125\pi(e^6 - 1)$

5. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I =]-4, +\infty[$ a f con $f(x) = 0$ se $|x| < 4$ e $f(x) = \frac{\pi}{2}$ se $x \geq 4$. Converge uniformemente in ogni insieme $[-a, a]$ (con $0 < a < 4$) e in $[4, +\infty[$.

6. $a_0 = 9(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi})$, $a_1 = \frac{9}{\pi}(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi})$, $b_1 = 9(\frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{4})$. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è C^1 a tratti. $S(\frac{17\pi}{2}) = S(\frac{\pi}{2}) = 9$.

7. $\beta = 7$, un potenziale $\varphi(x, y) = \log((x-1)^2 + y^2) + 5e^{x^2y^2}$, quindi $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma = \varphi(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) - \varphi(2, 0) = 5(e^{\frac{27}{16}} - 1)$

8. $f(t, y) = \frac{y^2-25}{y^2+25}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e limitata (quindi sublineare), quindi esistenza ed unicità globali; $u = \pm 5$ soluzioni stazionarie; se $y_0 < -5$ o $y_0 > 5$, soluzione u crescente; se $-5 < y_0 < 5$ soluzione u decrescente. Se $-5 < y_0 < 5$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 0$), convessa per $t > t^*$; se $y_0 < -5$, la soluzione u è concava, se $y_0 > 5$, convessa. Se $y_0 < -5$, $\lim_{t \to -\infty} u(t) = -\infty$ e $u = -5$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $-5 < y_0 < 5$, $\lim_{t \to \pm\infty} u(t) = \mp 5$ e $u = \mp 5$ è asintoto orizzontale per $t \to \pm\infty$; se $y_0 > 5$, $\lim_{t \to +\infty} u(t) = +\infty$ e $u = 5$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.

COMPITO 5

1. f è continua in $(0, 0)$; esistono tutte le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(0, 0)$ e sono nulle. f è differenziabile in $(0, 0)$, ma le derivate parziali non sono continue in $(0, 0)$.

2. Gli unici punti stazionari sono $(\pm\sqrt{1/6}, 1/2)$; $(-\sqrt{1/6}, 1/2)$ è punto di minimo relativo e $(\sqrt{1/6}, 1/2)$ è punto di sella.

3. $\frac{1}{6}\left[\left(2e^{4\pi} + 25\right)^{\frac{3}{2}} - 27^{\frac{3}{2}}\right]$

4. $216\pi(e^7 - 1)$

5. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I =]-3, +\infty[$ a f con $f(x) = 0$ se $|x| < 3$ e $f(x) = \frac{\pi}{2}$ se $x \geq 3$. Converge uniformemente in ogni insieme $[-a, a]$ (con $0 < a < 3$) e in $[3, +\infty[$.

6. $a_0 = 11(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi})$, $a_1 = \frac{11}{\pi}(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi})$, $b_1 = 11(\frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{4})$. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è C^1 a tratti. $S(\frac{21\pi}{2}) = S(\frac{\pi}{2}) = 11$.

7. $\beta = 8$, un potenziale $\varphi(x, y) = \log((x-1)^2 + y^2) + 6e^{x^2y^2}$, quindi $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma = \varphi(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) - \varphi(2, 0) = 6(e^{\frac{27}{16}} - 1)$

8. $f(t, y) = \frac{y^2-36}{y^2+36}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e limitata (quindi sublineare), quindi esistenza ed unicità globali; $u = \pm 6$ soluzioni stazionarie; se $y_0 < -6$ o $y_0 > 6$, soluzione u crescente; se $-6 < y_0 < 6$ soluzione u decrescente. Se $-6 < y_0 < 6$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 0$), convessa per $t > t^*$; se $y_0 < -6$, la soluzione u è concava, se $y_0 > 6$, convessa. Se $y_0 < -6$, $\lim_{t \to -\infty} u(t) = -\infty$ e $u = -6$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $-6 < y_0 < 6$, $\lim_{t \to \pm\infty} u(t) = \mp 6$ e $u = \mp 6$ è asintoto orizzontale per $t \to \pm\infty$; se $y_0 > 6$, $\lim_{t \to +\infty} u(t) = +\infty$ e $u = 6$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.

COMPITO 6

1. f è continua in $(0, 0)$; esistono tutte le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(0, 0)$ e sono nulle. f è differenziabile in $(0, 0)$, ma le derivate parziali non sono continue in $(0, 0)$.

2. Gli unici punti stazionari sono $(\pm 1/2, 1/2)$; $(-1/2, 1/2)$ è punto di minimo relativo e $(1/2, 1/2)$ è punto di sella.

3. $\frac{1}{6}\left[\left(2e^{4\pi}+36\right)^{\frac{3}{2}}-38^{\frac{3}{2}}\right]$

4. $343\pi(e^8-1)$

5. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I =]-2, +\infty[$ a f con $f(x) = 0$ se $|x| < 2$ e $f(x) = \frac{\pi}{2}$ se $x \geq 2$. Converge uniformemente in ogni insieme $[-a, a]$ (con $0 < a < 2$) e in $[2, +\infty[$.

6. $a_0 = 13(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi})$, $a_1 = \frac{13}{\pi}(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi})$, $b_1 = 13(\frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{4})$. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è C^1 a tratti. $S(\frac{25\pi}{2}) = S(\frac{\pi}{2}) = 13$.

7. $\beta = 9$, un potenziale $\varphi(x, y) = \log((x-1)^2+y^2)+7e^{x^2y^2}$, quindi $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma = \varphi(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) - \varphi(2, 0) = 7(e^{\frac{27}{16}} - 1)$

8. $f(t, y) = \frac{y^2-49}{y^2+49}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e limitata (quindi sublineare), quindi esistenza ed unicità globali; $u = \pm 7$ soluzioni stazionarie; se $y_0 < -7$ o $y_0 > 7$, soluzione u crescente; se $-7 < y_0 < 7$ soluzione u decrescente. Se $-7 < y_0 < 7$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 0$), convessa per $t > t^*$; se $y_0 < -7$, la soluzione u è concava, se $y_0 > 7$, convessa. Se $y_0 < -7$, $\lim_{t\to-\infty} u(t) = -\infty$ e $u = -7$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $-7 < y_0 < 7$, $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = \mp 7$ e $u = \mp 7$ è asintoto orizzontale per $t \to \pm\infty$; se $y_0 > 7$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$ e $u = 7$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.