ANALISI MATEMATICA II- 15 APRILE 2019 - C.d.L.: EDIQQ, EDILMU.

Il numero del compito è dato dall'intero sottratto a β nell'esercizio 6.

COMPITO 1

1. f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 2$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, mentre $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ se solo se $\alpha < 1$, altrimenti non esiste. f è differenziabile in $(0,0)$ se solo se $\alpha < 1$.
2. $m = 0$ assunto sul segmento congiungente $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$; $M = \frac{3}{4}$ assunto in $(\sqrt{3}, 0)$
3. $\alpha = 1$, $\beta = 2, I = -2\pi e^{\pi}$
4. $\frac{4}{15} 2^{5/2} \pi$
5. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I = [0,2]$ a f con $f(x) = 0$ se $0 \leq x < 2$, $f((2) = 3$. Converge uniformemente in ogni insieme $[0,b]$ (con $0 < b < 2$).
6. La serie è a termini non negativi; converge banalmente in $x = 0$ per qualsiasi $\beta \in \mathbb{R}$. Notando, ad esempio, che la serie è asintotica a $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x}{n^{\beta-1}}$, si mostra che la serie converge puntualmente per $\beta > 2$. Per gli stessi valori di β la convergenza non può essere totale in $[0,+\infty[$, ma solo in $[0,M]$ per ogni $M > 0$.
7. $a_0 = 0$, $a_1 = 3$, $b_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_2 = \frac{8}{\pi}$. Non converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché è discontinua; converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$ perché è continua a tratti. $S(2\pi) = 3$, $S(3\pi) = -3$.
8. $f(t,y) = \frac{y^2(y-7)}{y^2+1}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = 0$ e $u = 7$ soluzioni stazionarie; se $y_0 > 7$ le soluzioni sono crescenti per $t > 0$; per $y_0 < 0$ o $0 < y_0 < 7$ le soluzioni sono crescenti per $t < 0$. Se $y_0 > 7$, $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = +\infty$; se $0 < y_0 < 7$, $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = 0$; se $y_0 < 0$, $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = -\infty$.

COMPITO 2

1. f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 2$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, mentre $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ se solo se $\alpha < 1$, altrimenti non esiste. f è differenziabile in $(0,0)$ se solo se $\alpha < 1$.
2. $m = 0$ assunto sul segmento congiungente $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ e $(\sqrt{4}, \sqrt{4})$; $M = \frac{4}{5}$ assunto in $(\sqrt{4}, 0)$
3. $\alpha = 1$, $\beta = 2, I = -3\pi e^{\pi}$
4. $\frac{4}{15} 3^{5/2} \pi$
5. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I = [0,3]$ a f con $f(x) = 0$ se $0 \leq x < 3$, $f((3) = 4$. Converge uniformemente in ogni insieme $[0,b]$ (con $0 < b < 3$).
6. La serie è a termini non negativi; converge banalmente in $x = 0$ per qualsiasi $\beta \in \mathbb{R}$. Notando, ad esempio, che la serie è asintotica a $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x}{n^{\beta-2}}$, si mostra che la serie converge puntualmente per $\beta > 3$. Per gli stessi valori di β la convergenza non può essere totale in $[0,+\infty[$, ma solo in $[0,M]$ per ogni $M > 0$.
7. $a_0 = 0$, $a_1 = 6$, $b_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_2 = \frac{16}{\pi}$. Non converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché è discontinua; converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$ perché è continua a tratti. $S(4\pi) = 6$, $S(5\pi) = -6$.

8. $f(t,y) = \frac{y^2(y-6)}{y^2+1}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = 0$ e $u = 6$ soluzioni stazionarie; se $y_0 > 6$ le soluzioni sono crescenti per $t > 0$; per $y_0 < 0$ o $0 < y_0 < 6$ le soluzioni sono crescenti per $t < 0$. Se $y_0 > 6$, $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = +\infty$; se $0 < y_0 < 6$, $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = 0$; se $y_0 < 0$, $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = -\infty$.

COMPITO 3

1. f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 2$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, mentre $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ se solo se $\alpha < 1$, altrimenti non esiste. f è differenziabile in $(0,0)$ se solo se $\alpha < 1$.

2. $m = 0$ assunto sul segmento congiungente $(\sqrt{4}, \sqrt{4})$ e $(\sqrt{5}, \sqrt{5})$; $M = \frac{5}{6}$ assunto in $(\sqrt{5}, 0)$

3. $\alpha = 1$, $\beta = 2, I = -4\pi e^{\pi}$

4. $\frac{4}{15} 4^{5/2}\pi$

5. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I = [0,4]$ a f con $f(x) = 0$ se $0 \le x < 4$, $f((4) = 5$. Converge uniformemente in ogni insieme $[0,b]$ (con $0 < b < 4$).

6. La serie è a termini non negativi; converge banalmente in $x = 0$ per qualsiasi $\beta \in \mathbb{R}$. Notando, ad esempio, che la serie è asintotica a $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x}{n^{\beta-3}}$, si mostra che la serie converge puntualmente per $\beta > 4$. Per gli stessi valori di β la convergenza non può essere totale in $[0,+\infty[$, ma solo in $[0,M]$ per ogni $M > 0$.

7. $a_0 = 0$, $a_1 = 9$, $b_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_2 = \frac{24}{\pi}$. Non converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché è discontinua; converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$ perché è continua a tratti. $S(6\pi) = 9$, $S(7\pi) = -9$.

8. $f(t,y) = \frac{y^2(y-5)}{y^2+1}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = 0$ e $u = 5$ soluzioni stazionarie; se $y_0 > 5$ le soluzioni sono crescenti per $t > 0$; per $y_0 < 0$ o $0 < y_0 < 5$ le soluzioni sono crescenti per $t < 0$. Se $y_0 > 5$, $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = +\infty$; se $0 < y_0 < 5$, $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = 0$; se $y_0 < 0$, $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = -\infty$.
