ANALISI MATEMATICA II- 16 APRILE 2014 - C.d.L.: EDIQQ, EDILMU.

Il numero del compito è dato dall'intero sottratto ad α nell'esercizio 2.

COMPITO 1

1. f non è continua in $(0,0)$ (basta considerare la restrizione sull'asse y) e quindi non è differenziabile; per ogni direzione $\vec{v}=(v_1,v_2)$ (con $v_1 \neq 0$), $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)=7\frac{v_2^3}{v_1^2}$; se $v_1=0$ (e $v_2=1$), $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ non esiste.
2. Se $\alpha<1$, $(0,0)$ punto di massimo relativo; se $\alpha>1$, $(0,0)$ punto di minimo relativo; se $\alpha=1$, $(0,0)$ punto di sella.
3. $\sqrt[3]{2}\log(\sqrt[3]{2}+14)-\log 8$
4. $\frac{\pi}{9}(3^{3/2}-1)$
5. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\{f_n\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ a $f(x)\equiv 0$. Per $\alpha<1$ converge anche uniformemente in $\mathbb{R}$; se $\alpha \geq 1$ converge uniformemente in ogni intervallo $]-\infty,b]$ con $b>0$.
6. raggio 1 se $\beta=1$ (e converge anche sul bordo), ∞ se $\beta>1$, 0 se $\beta<1$. $S(x)=x^7(x\arctan x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)-\frac{x^2}{2})$
7. $y(t)=\frac{2}{t(14-\log^2 t)}$
8. $f(t,y)=\log(y^2+\frac{1}{2})$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità locali e globali; $u=\pm 1/\sqrt{2}$ soluzioni stazionarie. Se $y_0<-1/\sqrt{2}$ o $y_0>1/\sqrt{2}$ soluzione u crescente; se $-1/\sqrt{2}<y_0<1/\sqrt{2}$, soluzione u decrescente. Se $y_0<-1/\sqrt{2}$, la soluzione u è concava; $y_0>1/\sqrt{2}$ la soluzione u è convessa; se $-1/\sqrt{2}<y_0<1/\sqrt{2}$, u è concava per $t<t^*$ (con $u(t^*)=0$), convessa per $t>t^*$. Per $y_0<-1/\sqrt{2}$, $u=-1/\sqrt{2}$ è asintoto orizzontale per $t\to+\infty$ e $\lim_{t\to-\infty}u(t)=-\infty$; per $y_0>1/\sqrt{2}$, $u=1/\sqrt{2}$ è asintoto orizzontale per $t\to-\infty$ e $\lim_{t\to+\infty}u(t)=+\infty$; per $-1/\sqrt{2}<y_0<1/\sqrt{2}$, $u=-1/\sqrt{2}$ è asintoto orizzontale per $t\to-\infty$; $u=1/\sqrt{2}$ è asintoto orizzontale per $t\to+\infty$.

COMPITO 2

1. f non è continua in $(0,0)$ (basta considerare la restrizione sull'asse y) e quindi non è differenziabile; per ogni direzione $\vec{v}=(v_1,v_2)$ (con $v_1 \neq 0$), $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)=6\frac{v_2^3}{v_1^2}$; se $v_1=0$ (e $v_2=1$), $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ non esiste.
2. Se $\alpha<2$, $(0,0)$ punto di massimo relativo; se $\alpha>2$, $(0,0)$ punto di minimo relativo; se $\alpha=2$, $(0,0)$ punto di sella.
3. $\sqrt[3]{2}\log(\sqrt[3]{2}+12)-\log 7$
4. $\frac{\pi}{9}(4^{3/2}-1)$
5. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\{f_n\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ a $f(x)\equiv 0$. Per $\alpha<2$ converge anche uniformemente in $\mathbb{R}$; se $\alpha \geq 2$ converge uniformemente in ogni intervallo $]-\infty,b]$ con $b>0$.
6. raggio 1 se $\beta=2$ (e converge anche sul bordo), ∞ se $\beta>2$, 0 se $\beta<2$. $S(x)=x^6(x\arctan x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)-\frac{x^2}{2})$
7. $y(t)=\frac{2}{t(12-\log^2 t)}$

8. $f(t,y)=\log(y^2+\frac{2}{3})$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità locali e globali; $u=\pm 1/\sqrt{3}$ soluzioni stazionarie. Se $y_0<-1/\sqrt{3}$ o $y_0>1/\sqrt{3}$ soluzione u crescente; se $-1/\sqrt{3}<y_0<1/\sqrt{3}$, soluzione u decrescente. Se $y_0<-1/\sqrt{3}$, la soluzione u è concava; $y_0>1/\sqrt{3}$ la soluzione u è convessa; se $-1/\sqrt{3}<y_0<1/\sqrt{3}$, u è concava per $t<t^*$ (con $u(t^*)=0$), convessa per $t>t^*$. Per $y_0<-1/\sqrt{3}$, $u=-1/\sqrt{3}$ è asintoto orizzontale per $t\to+\infty$ e $\lim_{t\to-\infty}u(t)=-\infty$; per $y_0>1/\sqrt{3}$, $u=1/\sqrt{3}$ è asintoto orizzontale per $t\to-\infty$ e $\lim_{t\to+\infty}u(t)=+\infty$; per $-1/\sqrt{3}<y_0<1/\sqrt{3}$, $u=-1/\sqrt{3}$ è asintoto orizzontale per $t\to-\infty$; $u=1/\sqrt{3}$ è asintoto orizzontale per $t\to+\infty$.

COMPITO 3

1. f non è continua in $(0,0)$ (basta considerare la restrizione sull'asse y) e quindi non è differenziabile; per ogni direzione $\vec{v}=(v_1,v_2)$ (con $v_1\neq 0$), $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)=5\frac{v_2^3}{v_1^2}$; se $v_1=0$ (e $v_2=1$), $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ non esiste.

2. Se $\alpha<3$, $(0,0)$ punto di massimo relativo; se $\alpha>3$, $(0,0)$ punto di minimo relativo; se $\alpha=3$, $(0,0)$ punto di sella.

3. $\sqrt[3]{2}\log(\sqrt[3]{2}+10)-\log 6$

4. $\frac{\pi}{9}(5^{3/2}-1)$

5. Per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$ $\{f_n\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ a $f(x)\equiv 0$. Per $\alpha<3$ converge anche uniformemente in $\mathbb{R}$; se $\alpha\geq 3$ converge uniformemente in ogni intervallo $]-\infty,b]$ con $b>0$.

6. raggio 1 se $\beta=3$ (e converge anche sul bordo), ∞ se $\beta>3$, 0 se $\beta<3$. $S(x)=x^5(x\arctan x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)-\frac{x^2}{2})$

7. $y(t)=\frac{2}{t(10-\log^2 t)}$

8. $f(t,y)=\log(y^2+\frac{3}{4})$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità locali e globali; $u=\pm 1/\sqrt{4}$ soluzioni stazionarie. Se $y_0<-1/\sqrt{4}$ o $y_0>1/\sqrt{4}$ soluzione u crescente; se $-1/\sqrt{4}<y_0<1/\sqrt{4}$, soluzione u decrescente. Se $y_0<-1/\sqrt{4}$, la soluzione u è concava; $y_0>1/\sqrt{4}$ la soluzione u è convessa; se $-1/\sqrt{4}<y_0<1/\sqrt{4}$, u è concava per $t<t^*$ (con $u(t^*)=0$), convessa per $t>t^*$. Per $y_0<-1/\sqrt{4}$, $u=-1/\sqrt{4}$ è asintoto orizzontale per $t\to+\infty$ e $\lim_{t\to-\infty}u(t)=-\infty$; per $y_0>1/\sqrt{4}$, $u=1/\sqrt{4}$ è asintoto orizzontale per $t\to-\infty$ e $\lim_{t\to+\infty}u(t)=+\infty$; per $-1/\sqrt{4}<y_0<1/\sqrt{4}$, $u=-1/\sqrt{4}$ è asintoto orizzontale per $t\to-\infty$; $u=1/\sqrt{4}$ è asintoto orizzontale per $t\to+\infty$.

COMPITO 4

1. f non è continua in $(0,0)$ (basta considerare la restrizione sull'asse y) e quindi non è differenziabile; per ogni direzione $\vec{v}=(v_1,v_2)$ (con $v_1\neq 0$), $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)=4\frac{v_2^3}{v_1^2}$; se $v_1=0$ (e $v_2=1$), $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ non esiste.

2. Se $\alpha<4$, $(0,0)$ punto di massimo relativo; se $\alpha>4$, $(0,0)$ punto di minimo relativo; se $\alpha=4$, $(0,0)$ punto di sella.

3. $\sqrt[3]{2}\log(\sqrt[3]{2}+8)-\log 5$

4. $\frac{\pi}{9}(6^{3/2}-1)$

5. Per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$ $\{f_n\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ a $f(x)\equiv 0$. Per $\alpha<4$ converge anche uniformemente in $\mathbb{R}$; se $\alpha\geq 4$ converge uniformemente in ogni intervallo $]-\infty,b]$ con $b>0$.

6. raggio 1 se $\beta = 4$ (e converge anche sul bordo), ∞ se $\beta > 4$, 0 se $\beta < 4$. $S(x) = x^4(x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) - \frac{x^2}{2})$

7. $y(t) = \frac{2}{t(8-\log^2 t)}$

8. $f(t,y) = \log(y^2 + \frac{4}{5})$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità locali e globali; $u = \pm 1/\sqrt{5}$ soluzioni stazionarie. Se $y_0 < -1/\sqrt{5}$ o $y_0 > 1/\sqrt{5}$ soluzione u crescente; se $-1/\sqrt{5} < y_0 < 1/\sqrt{5}$, soluzione u decrescente. Se $y_0 < -1/\sqrt{5}$, la soluzione u è concava; $y_0 > 1/\sqrt{5}$ la soluzione u è convessa; se $-1/\sqrt{5} < y_0 < 1/\sqrt{5}$, u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 0$), convessa per $t > t^*$. Per $y_0 < -1/\sqrt{5}$, $u = -1/\sqrt{5}$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$ e $\lim_{t\to-\infty} u(t) = -\infty$; per $y_0 > 1/\sqrt{5}$, $u = 1/\sqrt{5}$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$ e $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$; per $-1/\sqrt{5} < y_0 < 1/\sqrt{5}$, $u = -1/\sqrt{5}$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$; $u = 1/\sqrt{5}$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$.

COMPITO 5

1. f non è continua in $(0,0)$ (basta considerare la restrizione sull'asse y) e quindi non è differenziabile; per ogni direzione $\vec{v} = (v_1, v_2)$ (con $v_1 \neq 0$), $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = 3\frac{v_2^3}{v_1^2}$; se $v_1 = 0$ (e $v_2 = 1$), $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ non esiste.

2. Se $\alpha < 5$, $(0,0)$ punto di massimo relativo; se $\alpha > 5$, $(0,0)$ punto di minimo relativo; se $\alpha = 5$, $(0,0)$ punto di sella.

3. $\sqrt[3]{2}\log(\sqrt[3]{2} + 6) - \log 4$

4. $\frac{\pi}{9}(7^{3/2} - 1)$

5. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\{f_n\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ a $f(x) \equiv 0$. Per $\alpha < 5$ converge anche uniformemente in $\mathbb{R}$; se $\alpha \geq 5$ converge uniformemente in ogni intervallo $]-\infty, b]$ con $b > 0$.

6. raggio 1 se $\beta = 5$ (e converge anche sul bordo), ∞ se $\beta > 5$, 0 se $\beta < 5$. $S(x) = x^3(x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) - \frac{x^2}{2})$

7. $y(t) = \frac{2}{t(6-\log^2 t)}$

8. $f(t,y) = \log(y^2 + \frac{5}{6})$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità locali e globali; $u = \pm 1/\sqrt{6}$ soluzioni stazionarie. Se $y_0 < -1/\sqrt{6}$ o $y_0 > 1/\sqrt{6}$ soluzione u crescente; se $-1/\sqrt{6} < y_0 < 1/\sqrt{6}$, soluzione u decrescente. Se $y_0 < -1/\sqrt{6}$, la soluzione u è concava; $y_0 > 1/\sqrt{6}$ la soluzione u è convessa; se $-1/\sqrt{6} < y_0 < 1/\sqrt{6}$, u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 0$), convessa per $t > t^*$. Per $y_0 < -1/\sqrt{6}$, $u = -1/\sqrt{6}$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$ e $\lim_{t\to-\infty} u(t) = -\infty$; per $y_0 > 1/\sqrt{6}$, $u = 1/\sqrt{6}$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$ e $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$; per $-1/\sqrt{6} < y_0 < 1/\sqrt{6}$, $u = -1/\sqrt{6}$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$; $u = 1/\sqrt{6}$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$.

COMPITO 6

1. f non è continua in $(0,0)$ (basta considerare la restrizione sull'asse y) e quindi non è differenziabile; per ogni direzione $\vec{v} = (v_1, v_2)$ (con $v_1 \neq 0$), $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = 2\frac{v_2^3}{v_1^2}$; se $v_1 = 0$ (e $v_2 = 1$), $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ non esiste.

2. Se $\alpha < 6$, $(0,0)$ punto di massimo relativo; se $\alpha > 6$, $(0,0)$ punto di minimo relativo; se $\alpha = 6$, $(0,0)$ punto di sella.

3. $\sqrt[3]{2}\log(\sqrt[3]{2}+4)-\log 3$

4. $\frac{\pi}{9}(8^{3/2}-1)$

5. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\{f_n\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ a $f(x) \equiv 0$. Per $\alpha < 6$ converge anche uniformemente in $\mathbb{R}$; se $\alpha \geq 6$ converge uniformemente in ogni intervallo $]-\infty, b]$ con $b > 0$.

6. raggio 1 se $\beta = 6$ (e converge anche sul bordo), ∞ se $\beta > 6$, 0 se $\beta < 6$. $S(x) = x^2(x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) - \frac{x^2}{2})$

7. $y(t) = \frac{2}{t(4-\log^2 t)}$

8. $f(t,y) = \log(y^2 + \frac{6}{7})$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità locali e globali; $u = \pm 1/\sqrt{7}$ soluzioni stazionarie. Se $y_0 < -1/\sqrt{7}$ o $y_0 > 1/\sqrt{7}$ soluzione u crescente; se $-1/\sqrt{7} < y_0 < 1/\sqrt{7}$, soluzione u decrescente. Se $y_0 < -1/\sqrt{7}$, la soluzione u è concava; $y_0 > 1/\sqrt{7}$ la soluzione u è convessa; se $-1/\sqrt{7} < y_0 < 1/\sqrt{7}$, u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 0$), convessa per $t > t^*$. Per $y_0 < -1/\sqrt{7}$, $u = -1/\sqrt{7}$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$ e $\lim_{t\to-\infty} u(t) = -\infty$; per $y_0 > 1/\sqrt{7}$, $u = 1/\sqrt{7}$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$ e $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$; per $-1/\sqrt{7} < y_0 < 1/\sqrt{7}$, $u = -1/\sqrt{7}$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$; $u = 1/\sqrt{7}$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$.
