ANALISI MATEMATICA 2 - III prova intermedia - 21 dicembre 2018

Il NUMERO della FILA è l'addendo aggiunto ad n^α nel numeratore della serie nel testo dell'esercizio n° 2.

Fila 1

1. f_n converge puntualmente in $I =]-1, +\infty[$ a f con $f(x) = \pi/4$ se $x \in]-1, 1]$, $f(1) = \pi/8$, $f(x) = 0$ se $x \in]1, +\infty[$; non converge uniformemente in tutto $I \cap [0, +\infty[$, ma in ogni intervallo $[0, b]$ con $0 < b < 1$ e $[a, +\infty[$ con $a > 1$.

2. Il raggio è 2 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Se $\alpha \geq 1$, non converge sul bordo (quindi convergenza totale in $[-M, M]$ con $0 < M < 2$); se $0 < \alpha < 1$, converge in $x = -2$ per il criterio di Leibniz, diverge in $x = 2$ (quindi convergenza uniforme in $[-2, M]$ con $0 < M < 2$ per il teorema di Abel). Nel caso $\alpha = 1$ $g(x) = \frac{x}{2-x}$.

3. Converge banalmente in $x = 0$; usando, ad esempio, il criterio della radice asintotico, si mostra che converge puntualmente in $[0, +\infty[$. Converge totalmente in $[0, +\infty[$, poiché $\frac{x}{n^2} e^{-n^2 x} \leq \frac{e^{-1}}{n^4}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-1}}{n^4}$ è una serie (armonica geenralizzata) convergente.

4. $a_0 = -\pi$, $a_n = \frac{4}{\pi n^2}$ se n è dispari, $a_n = 0$ se n è pari; $b_n = -\frac{2}{n}(-1)^n$. Converge puntualmente (ma non uniformemente) in tutto $\mathbb{R}$; $S(4\pi) = 0$, $S(\frac{5}{2}\pi) = 0$, $S(3\pi) = -\pi$.

5. $f(t, y) = \arctan(y^2 - 4)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = \pm 2$ soluzioni stazionarie; se $y_0 < -2$ o $y_0 > 2$ soluzione u crescente; se $-2 < y_0 < 2$ soluzione u decrescente. Se $-2 < y_0 < 2$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 0$), convessa per $t > t^*$; se $y_0 < -2$, la soluzione u è concava, se $y_0 > 2$, convessa. Se $y_0 < -2$, $\lim_{t \to -\infty} u(t) = -\infty$ e $u = -2$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $-2 < y_0 < 2$, $\lim_{t \to \pm\infty} u(t) = \mp 2$ e $u = \mp 2$ è asintoto orizzontale per $t \to \pm\infty$; se $y_0 > 2$, $\lim_{t \to +\infty} u(t) = +\infty$ e $u = 2$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.

Fila 2

1. f_n converge puntualmente in $I =]-1, +\infty[$ a f con $f(x) = \pi/6$ se $x \in]-1, 1]$, $f(1) = \pi/12$, $f(x) = 0$ se $x \in]1, +\infty[$; non converge uniformemente in tutto $I \cap [0, +\infty[$, ma in ogni intervallo $[0, b]$ con $0 < b < 1$ e $[a, +\infty[$ con $a > 1$.

2. Il raggio è 3 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Se $\alpha \geq 1$, non converge sul bordo (quindi convergenza totale in $[-M, M]$ con $0 < M < 3$); se $0 < \alpha < 1$, converge in $x = -3$ per il criterio di Leibniz, diverge in $x = 3$ (quindi convergenza uniforme in $[-3, M]$ con $0 < M < 3$ per il teorema di Abel). Nel caso $\alpha = 1$ $g(x) = \frac{x}{3-x}$.

3. Converge banalmente in $x = 0$; usando, ad esempio, il criterio della radice asintotico, si mostra che converge puntualmente in $[0, +\infty[$. Converge totalmente in $[0, +\infty[$, poiché $\frac{x}{n^3} e^{-n^3 x} \leq \frac{e^{-1}}{n^6}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-1}}{n^6}$ è una serie (armonica geenralizzata) convergente.

4. $a_0 = -2\pi$, $a_n = \frac{8}{\pi n^2}$ se n è dispari, $a_n = 0$ se n è pari; $b_n = -\frac{4}{n}(-1)^n$. Converge puntualmente (ma non uniformemente) in tutto $\mathbb{R}$; $S(8\pi) = 0$, $S(\frac{5}{2}\pi) = 0$, $S(5\pi) = -2\pi$.

5. $f(t,y) = \arctan(y^2 - 9)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = \pm 3$ soluzioni stazionarie; se $y_0 < -3$ o $y_0 > 3$ soluzione u crescente; se $-3 < y_0 < 3$ soluzione u decrescente. Se $-3 < y_0 < 3$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 0$), convessa per $t > t^*$; se $y_0 < -3$, la soluzione u è concava, se $y_0 > 3$, convessa. Se $y_0 < -3$, $\lim_{t\to-\infty} u(t) = -\infty$ e $u = -3$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $-3 < y_0 < 3$, $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = \mp 3$ e $u = \mp 3$ è asintoto orizzontale per $t \to \pm\infty$; se $y_0 > 3$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$ e $u = 3$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.

Fila 3

1. f_n converge puntualmente in $I =]-1, +\infty[$ a f con $f(x) = \pi/8$ se $x \in]-1, 1]$, $f(1) = \pi/16$, $f(x) = 0$ se $x \in]1, +\infty[$; non converge uniformemente in tutto $I \cap [0, +\infty[$, ma in ogni intervallo $[0, b]$ con $0 < b < 1$ e $[a, +\infty[$ con $a > 1$.

2. Il raggio è 4 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Se $\alpha \geq 1$, non converge sul bordo (quindi convergenza totale in $[-M, M]$ con $0 < M < 4$); se $0 < \alpha < 1$, converge in $x = -4$ per il criterio di Leibniz, diverge in $x = 4$ (quindi convergenza uniforme in $[-4, M]$ con $0 < M < 4$ per il teorema di Abel). Nel caso $\alpha = 1$ $g(x) = \frac{x}{4-x}$.

3. Converge banalmente in $x = 0$; usando, ad esempio, il criterio della radice asintotico, si mostra che converge puntualmente in $[0, +\infty[$. Converge totalmente in $[0, +\infty[$, poiché $\frac{x}{n^4} e^{-n^4 x} \leq \frac{e^{-1}}{n^8}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-1}}{n^8}$ è una serie (armonica geenralizzata) convergente.

4. $a_0 = -3\pi$, $a_n = \frac{12}{\pi n^2}$ se n è dispari, $a_n = 0$ se n è pari; $b_n = -\frac{6}{n}(-1)^n$. Converge puntualmente (ma non uniformemente) in tutto $\mathbb{R}$; $S(12\pi) = 0$, $S(\frac{5}{2}\pi) = 0$, $S(7\pi) = -3\pi$.

5. $f(t,y) = \arctan(y^2 - 16)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = \pm 4$ soluzioni stazionarie; se $y_0 < -4$ o $y_0 > 4$ soluzione u crescente; se $-4 < y_0 < 4$ soluzione u decrescente. Se $-4 < y_0 < 4$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 0$), convessa per $t > t^*$; se $y_0 < -4$, la soluzione u è concava, se $y_0 > 4$, convessa. Se $y_0 < -4$, $\lim_{t\to-\infty} u(t) = -\infty$ e $u = -4$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $-4 < y_0 < 4$, $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = \mp 4$ e $u = \mp 4$ è asintoto orizzontale per $t \to \pm\infty$; se $y_0 > 4$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$ e $u = 4$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.
