ANALISI MATEMATICA II- 21 MARZO 2016 - C.d.L.: EDIQQ, EDILMU.

Il numero del compito è dato dal coefficiente di x^3 nell'esercizio 4 diminuito di 1.

COMPITO 1

1. f non è continua in $(0,0)$ (e quindi non può essere differenziabile). Se $\vec{v} = (v_1, v_2)$ e $v_2 \neq 0$ esistono le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \frac{7v_1^3}{v_2^2}$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ non esiste.
2. $m = 1$ assunto in $(0,0)$ e $M = e^2$ assunto in $(1,1)$.
3. $\overrightarrow{F}$ è un gradiente; un potenziale è $\varphi(x,y) = \log(7(x^2+y^2+1)+xy) + ye^x + xe^y$; $I_1 = \varphi(1,1) - \varphi(0,0) = \log 22 - \log 7 + 2e$ e $I_2 = 0$.
4. $3(\pi + 2)$
5. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I = [7,8]$ a f con $f(x) = 0$ se $7 \leq x < 8$ e $f(8) = \log 2$. Converge uniformemente in ogni insieme $[7,b]$ (con $7 < b < 8$).
6. La serie ha raggio di convergenza 1 per ogni $\alpha \geq 7$. Se $\alpha > 7$ converge totalmente (e quindi uniformemente) in $[-1,1]$. Se $\alpha = 7$ converge semplicemente in $x = 1$, ma in $x = -1$ diverge, quindi si ha convergenza uniforme in $[-r,1]$ con $-1 < -r < 0$. $s(x) = \log(1+x)$.
7. $\frac{2}{3}[5^{3/2} - \frac{2}{5}5^{5/2} + \frac{2}{5}2^5]$
8. $f(t,y) = \sqrt{y^2+1}(y-3)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non sublineare, quindi non si possono dedurre esistenza ed unicità globali; $u = 3$, soluzione stazionaria; se $y_0 < 3$, soluzione u decrescente; se $y_0 > 3$, soluzione u crescente. Se $y_0 < 3$, la soluzione u è concava per $t < t_1$ o $t > t_2$ (con $u(t_1) = 1$ e $u(t_2) = \frac{1}{2}$), convessa per $t_1 < t < t_2$. Se $y_0 > 3$, la soluzione u è convessa. L'intervallo massimale di esistenza è illimitato a sinistra e $\lim_{t \to -\infty} u(t) = 3$ per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$.

COMPITO 2

1. f non è continua in $(0,0)$ (e quindi non può essere differenziabile). Se $\vec{v} = (v_1, v_2)$ e $v_2 \neq 0$ esistono le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \frac{6v_1^3}{v_2^2}$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ non esiste.
2. $m = 1$ assunto in $(0,0)$ e $M = e^5$ assunto in $(1,2)$.
3. $\overrightarrow{F}$ è un gradiente; un potenziale è $\varphi(x,y) = \log(6(x^2+y^2+1)+xy) + ye^x + xe^y$; $I_1 = \varphi(1,1) - \varphi(0,0) = \log 19 - \log 6 + 2e$ e $I_2 = 0$.
4. $5(\pi + 2)$
5. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I = [6,7]$ a f con $f(x) = 0$ se $6 \leq x < 7$ e $f(7) = \log 2$. Converge uniformemente in ogni insieme $[6,b]$ (con $6 < b < 7$).
6. La serie ha raggio di convergenza 1 per ogni $\alpha \geq 6$. Se $\alpha > 6$ converge totalmente (e quindi uniformemente) in $[-1,1]$. Se $\alpha = 6$ converge semplicemente in $x = 1$, ma in $x = -1$ diverge, quindi si ha convergenza uniforme in $[-r,1]$ con $-1 < -r < 0$. $s(x) = \log(1+x)$.
7. $\frac{2}{3}[10^{3/2} - \frac{2}{5}10^{5/2} + \frac{2}{5}3^5]$

8. $f(t,y) = \sqrt{y^2+4}(y-6)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non sublineare, quindi non si possono dedurre esistenza ed unicità globali; $u = 6$, soluzione stazionaria; se $y_0 < 6$, soluzione u decrescente; se $y_0 > 6$, soluzione u crescente. Se $y_0 < 6$, la soluzione u è concava per $t < t_1$ o $t > t_2$ (con $u(t_1) = 2$ e $u(t_2) = 1$), convessa per $t_1 < t < t_2$. Se $y_0 > 6$, la soluzione u è convessa. L'intervallo massimale di esistenza è illimitato a sinistra e $\lim_{t\to-\infty} u(t) = 6$ per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$.

COMPITO 3

1. f non è continua in $(0,0)$ (e quindi non può essere differenziabile). Se $\vec{v} = (v_1, v_2)$ e $v_2 \neq 0$ esistono le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \frac{5v_1^3}{v_2^2}$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ non esiste.

2. $m = 1$ assunto in $(0,0)$ e $M = e^{10}$ assunto in $(1,3)$.

3. $\overrightarrow{F}$ è un gradiente; un potenziale è $\varphi(x,y) = \log(5(x^2+y^2+1)+xy) + ye^x + xe^y$; $I_1 = \varphi(1,1) - \varphi(0,0) = \log 16 - \log 5 + 2e$ e $I_2 = 0$.

4. $7(\pi + 2)$

5. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I = [5,6]$ a f con $f(x) = 0$ se $5 \le x < 6$ e $f(6) = \log 2$. Converge uniformemente in ogni insieme $[5,b]$ (con $5 < b < 6$).

6. La serie ha raggio di convergenza 1 per ogni $\alpha \ge 5$. Se $\alpha > 5$ converge totalmente (e quindi uniformemente) in $[-1,1]$. Se $\alpha = 5$ converge semplicemente in $x = 1$, ma in $x = -1$ diverge, quindi si ha convergenza uniforme in $[-r,1]$ con $-1 < -r < 0$. $s(x) = \log(1+x)$.

7. $\frac{2}{3}[17^{3/2} - \frac{2}{5}17^{5/2} + \frac{2}{5}4^5]$

8. $f(t,y) = \sqrt{y^2+9}(y-9)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non sublineare, quindi non si possono dedurre esistenza ed unicità globali; $u = 9$, soluzione stazionaria; se $y_0 < 9$, soluzione u decrescente; se $y_0 > 9$, soluzione u crescente. Se $y_0 < 9$, la soluzione u è concava per $t < t_1$ o $t > t_2$ (con $u(t_1) = 3$ e $u(t_2) = \frac{3}{2}$), convessa per $t_1 < t < t_2$. Se $y_0 > 9$, la soluzione u è convessa. L'intervallo massimale di esistenza è illimitato a sinistra e $\lim_{t\to-\infty} u(t) = 9$ per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$.

COMPITO 4

1. f non è continua in $(0,0)$ (e quindi non può essere differenziabile). Se $\vec{v} = (v_1, v_2)$ e $v_2 \neq 0$ esistono le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \frac{4v_1^3}{v_2^2}$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ non esiste.

2. $m = 1$ assunto in $(0,0)$ e $M = e^{17}$ assunto in $(1,4)$.

3. $\overrightarrow{F}$ è un gradiente; un potenziale è $\varphi(x,y) = \log(4(x^2+y^2+1)+xy) + ye^x + xe^y$; $I_1 = \varphi(1,1) - \varphi(0,0) = \log 13 - \log 4 + 2e$ e $I_2 = 0$.

4. $9(\pi + 2)$

5. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I = [4,5]$ a f con $f(x) = 0$ se $4 \le x < 5$ e $f(5) = \log 2$. Converge uniformemente in ogni insieme $[4,b]$ (con $4 < b < 5$).

6. La serie ha raggio di convergenza 1 per ogni $\alpha \ge 4$. Se $\alpha > 4$ converge totalmente (e quindi uniformemente) in $[-1,1]$. Se $\alpha = 4$ converge semplicemente in $x = 1$, ma in $x = -1$ diverge, quindi si ha convergenza uniforme in $[-r,1]$ con $-1 < -r < 0$. $s(x) = \log(1+x)$.

7. $\frac{2}{3}[26^{3/2} - \frac{2}{5}26^{5/2} + \frac{2}{5}5^5]$

8. $f(t,y) = \sqrt{y^2+16}(y-12)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non sublineare, quindi non si possono dedurre esistenza ed unicità globali; $u = 12$, soluzione stazionaria; se $y_0 < 12$, soluzione u decrescente; se $y_0 > 12$, soluzione u crescente. Se $y_0 < 12$, la soluzione u è concava per $t < t_1$ o $t > t_2$ (con $u(t_1) = 4$ e $u(t_2) = 2$), convessa per $t_1 < t < t_2$. Se $y_0 > 12$, la soluzione u è convessa. L'intervallo massimale di esistenza è illimitato a sinistra e $\lim_{t\to-\infty} u(t) = 12$ per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$.

COMPITO 5

1. f non è continua in $(0,0)$ (e quindi non può essere differenziabile). Se $\vec{v} = (v_1, v_2)$ e $v_2 \neq 0$ esistono le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \frac{3v_1^3}{v_2^2}$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ non esiste.

2. $m = 1$ assunto in $(0,0)$ e $M = e^{26}$ assunto in $(1,5)$.

3. $\overrightarrow{F}$ è un gradiente; un potenziale è $\varphi(x,y) = \log(3(x^2+y^2+1)+xy) + ye^x + xe^y$; $I_1 = \varphi(1,1) - \varphi(0,0) = \log 10 - \log 3 + 2e$ e $I_2 = 0$.

4. $11(\pi + 2)$

5. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I = [3,4]$ a f con $f(x) = 0$ se $3 \leq x < 4$ e $f(4) = \log 2$. Converge uniformemente in ogni insieme $[3,b]$ (con $3 < b < 4$).

6. La serie ha raggio di convergenza 1 per ogni $\alpha \geq 3$. Se $\alpha > 3$ converge totalmente (e quindi uniformemente) in $[-1,1]$. Se $\alpha = 3$ converge semplicemente in $x = 1$, ma in $x = -1$ diverge, quindi si ha convergenza uniforme in $[-r,1]$ con $-1 < -r < 0$. $s(x) = \log(1+x)$.

7. $\frac{2}{3}[37^{3/2} - \frac{2}{5}37^{5/2} + \frac{2}{5}6^5]$

8. $f(t,y) = \sqrt{y^2+25}(y-15)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non sublineare, quindi non si possono dedurre esistenza ed unicità globali; $u = 15$, soluzione stazionaria; se $y_0 < 15$, soluzione u decrescente; se $y_0 > 15$, soluzione u crescente. Se $y_0 < 15$, la soluzione u è concava per $t < t_1$ o $t > t_2$ (con $u(t_1) = 5$ e $u(t_2) = \frac{5}{2}$), convessa per $t_1 < t < t_2$. Se $y_0 > 15$, la soluzione u è convessa. L'intervallo massimale di esistenza è illimitato a sinistra e $\lim_{t\to-\infty} u(t) = 15$ per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$.

COMPITO 6

1. f non è continua in $(0,0)$ (e quindi non può essere differenziabile). Se $\vec{v} = (v_1, v_2)$ e $v_2 \neq 0$ esistono le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \frac{2v_1^3}{v_2^2}$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ non esiste.

2. $m = 1$ assunto in $(0,0)$ e $M = e^{37}$ assunto in $(1,6)$.

3. $\overrightarrow{F}$ è un gradiente; un potenziale è $\varphi(x,y) = \log(2(x^2+y^2+1)+xy) + ye^x + xe^y$; $I_1 = \varphi(1,1) - \varphi(0,0) = \log 7 - \log 2 + 2e$ e $I_2 = 0$.

4. $13(\pi + 2)$

5. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I = [2,3]$ a f con $f(x) = 0$ se $2 \leq x < 3$ e $f(3) = \log 2$. Converge uniformemente in ogni insieme $[2,b]$ (con $2 < b < 3$).

6. La serie ha raggio di convergenza 1 per ogni $\alpha \geq 2$. Se $\alpha > 2$ converge totalmente (e quindi uniformemente) in $[-1,1]$. Se $\alpha = 2$ converge semplicemente in $x = 1$, ma in $x = -1$ diverge, quindi si ha convergenza uniforme in $[-r,1]$ con $-1 < -r < 0$. $s(x) = \log(1+x)$.

7. $\frac{2}{3}[50^{3/2} - \frac{2}{5}50^{5/2} + \frac{2}{5}7^5]$

8. $f(t,y) = \sqrt{y^2+36}(y-18)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non sublineare, quindi non si possono dedurre esistenza ed unicità globali; $u = 18$, soluzione stazionaria; se $y_0 < 18$, soluzione u decrescente; se $y_0 > 18$, soluzione u crescente. Se $y_0 < 18$, la soluzione u è concava per $t < t_1$ o $t > t_2$ (con $u(t_1) = 6$ e $u(t_2) = 3$), convessa per $t_1 < t < t_2$. Se $y_0 > 18$, la soluzione u è convessa. L'intervallo massimale di esistenza è illimitato a sinistra e $\lim_{t\to-\infty} u(t) = 18$ per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$.