ANALISI MATEMATICA II- 30 GENNAIO 2017 - C.d.L.: EDIQQ, EDILMU.

---

Il numero del compito è dato dall'intero sommato ad $n$ nel testo dell'esercizio 5.

---

**COMPITO** 1

1. $f$ è continua in $(0,0)$; esistono le derivate parziali e sono nulle. Mediante la definizione si mostra che $f$ non è differenziabile in $(0,0)$.
2. I punti $(0,0)$ e $(\pm 2,0)$ sono di sella, mentre $(0,2)$ è di minimo relativo e $(0,-2)$ è di massimo relativo.
3. 8
4. $e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$
5. $f_n$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $[0,1]$ a $f$ con $f(x) = x^2$ per $0 < x < 1$, $f(1) = 0$; converge uniformemente in ogni intervallo $[0,a]$ con $0 < a < 1$. La tesi del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale vale, verificando direttamente.
6. $a_0 = \frac{\pi+2}{2\pi}$, $a_1 = 0$, $b_1 = \frac{\pi-4}{4\pi}$, $a_2 = -\frac{1}{3\pi}$, $b_2 = 0$. Converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$ perché $f$ è continua a tratti. $S(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$.
7. Ponendo $e^x - 3 = t$, si può studiare come serie di potenze. Per ogni $\beta$ la serie converge puntualmente per $x \in ]\log 2, \log 4[$; per $\beta > 3$ la serie converge anche in $x = \log 2$ e in $x = \log 4$; per $2 < \beta \leq 3$ la serie converge in $x = \log 2$ e non in $x = \log 4$.
8. $f(t,y) = y(y^2-4)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non è sublineare, quindi esistenza ed unicità solo locali; $u = 0$ e $u = \pm 2$ soluzioni stazionarie; se $y_0 < -2$ o $0 < y_0 < 2$, soluzione $u$ decrescente; se $-2 < y_0 < 0$ o $y_0 > 2$ soluzione $u$ crescente. Se $y_0 < -2$, la soluzione $u$ è concava; se $y_0 > 2$, convessa. Se $-2 < y_0 < 0$ la soluzione $u$ è convessa per $t < t_1$ (con $u(t_1) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$), concava per $t > t_1$. Se $0 < y_0 < 2$ la soluzione $u$ è concava per $t < t_2$ (con $u(t_2) = \frac{2}{\sqrt{3}}$), convessa per $t > t_2$. Se $y_0 < 0$ $u = -2$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$; se $y_0 > 0$ $u = 2$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$; se $-2 \leq y_0 \leq 2$, $u = 0$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$.

---

**COMPITO** 2

1. $f$ è continua in $(0,0)$; esistono le derivate parziali e sono nulle. Mediante la definizione si mostra che $f$ non è differenziabile in $(0,0)$.
2. I punti $(0,0)$ e $(\pm 3,0)$ sono di sella, mentre $(0,3)$ è di minimo relativo e $(0,-3)$ è di massimo relativo.
3. 27
4. $e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$
5. $f_n$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $[0,1]$ a $f$ con $f(x) = x^4$ per $0 < x < 1$, $f(1) = 0$; converge uniformemente in ogni intervallo $[0,a]$ con $0 < a < 1$. La tesi del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale vale, verificando direttamente.
6. $a_0 = \frac{\pi+2}{4\pi}$, $a_1 = 0$, $b_1 = \frac{\pi-4}{8\pi}$, $a_2 = -\frac{1}{6\pi}$, $b_2 = 0$. Converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$ perché $f$ è continua a tratti. $S(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4}$.

7. Ponendo $e^x - 4 = t$, si può studiare come serie di potenze. Per ogni $\beta$ la serie converge puntualmente per $x \in ]\log 3, \log 5[$; per $\beta > 3$ la serie converge anche in $x = \log 3$ e in $x = \log 5$; per $2 < \beta \leq 3$ la serie converge in $x = \log 3$ e non in $x = \log 5$.

8. $f(t, y) = y(y^2 - 9)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non è sublineare, quindi esistenza ed unicità solo locali; $u = 0$ e $u = \pm 3$ soluzioni stazionarie; se $y_0 < -3$ o $0 < y_0 < 3$, soluzione $u$ decrescente; se $-3 < y_0 < 0$ o $y_0 > 3$ soluzione $u$ crescente. Se $y_0 < -3$, la soluzione $u$ è concava; se $y_0 > 3$, convessa. Se $-3 < y_0 < 0$ la soluzione $u$ è convessa per $t < t_1$ (con $u(t_1) = -\frac{3}{\sqrt{3}}$), concava per $t > t_1$. Se $0 < y_0 < 3$ la soluzione $u$ è concava per $t < t_2$ (con $u(t_2) = \frac{3}{\sqrt{3}}$), convessa per $t > t_2$. Se $y_0 < 0$ $u = -3$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$; se $y_0 > 0$ $u = 3$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$; se $-3 \leq y_0 \leq 3$, $u = 0$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$.

---

**COMPITO** 3

1. $f$ è continua in $(0, 0)$; esistono le derivate parziali e sono nulle. Mediante la definizione si mostra che $f$ non è differenziabile in $(0, 0)$.

2. I punti $(0, 0)$ e $(\pm 4, 0)$ sono di sella, mentre $(0, 4)$ è di minimo relativo e $(0, -4)$ è di massimo relativo.

3. 64

4. $e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

5. $f_n$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $[0, 1]$ a $f$ con $f(x) = x^6$ per $0 < x < 1$, $f(1) = 0$; converge uniformemente in ogni intervallo $[0, a]$ con $0 < a < 1$. La tesi del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale vale, verificando direttamente.

6. $a_0 = \frac{\pi+2}{6\pi}$, $a_1 = 0$, $b_1 = \frac{\pi-4}{12\pi}$, $a_2 = -\frac{1}{9\pi}$, $b_2 = 0$. Converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$ perché $f$ è continua a tratti. $S(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{6}$.

7. Ponendo $e^x - 5 = t$, si può studiare come serie di potenze. Per ogni $\beta$ la serie converge puntualmente per $x \in ]\log 4, \log 6[$; per $\beta > 3$ la serie converge anche in $x = \log 4$ e in $x = \log 6$; per $2 < \beta \leq 3$ la serie converge in $x = \log 4$ e non in $x = \log 6$.

8. $f(t, y) = y(y^2 - 16)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non è sublineare, quindi esistenza ed unicità solo locali; $u = 0$ e $u = \pm 4$ soluzioni stazionarie; se $y_0 < -4$ o $0 < y_0 < 4$, soluzione $u$ decrescente; se $-4 < y_0 < 0$ o $y_0 > 4$ soluzione $u$ crescente. Se $y_0 < -4$, la soluzione $u$ è concava; se $y_0 > 4$, convessa. Se $-4 < y_0 < 0$ la soluzione $u$ è convessa per $t < t_1$ (con $u(t_1) = -\frac{4}{\sqrt{3}}$), concava per $t > t_1$. Se $0 < y_0 < 4$ la soluzione $u$ è concava per $t < t_2$ (con $u(t_2) = \frac{4}{\sqrt{3}}$), convessa per $t > t_2$. Se $y_0 < 0$ $u = -4$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$; se $y_0 > 0$ $u = 4$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$; se $-4 \leq y_0 \leq 4$, $u = 0$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$.

---