ANALISI MATEMATICA II- 30 GENNAIO 2018 - C.d.L.: EDIQQ, EDILMU.

Il numero del compito è dato dall'intero sottratto a x nella definizione di T dell'esercizio 4.

COMPITO 1

1. f è continua in $(0,0)$ per $\alpha > 1/2$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ per ogni $\alpha > 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ non esiste se $\alpha \leq 1$, mentre se $\alpha > 1$ $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$; f è differenziabile in $(0,0)$ se solo se $\alpha > 1$.
2. I punti $(0, \pm 1)$ sono di sella, mentre il punto $(2,0)$ è di minimo relativo.
3. $\overrightarrow{F}$ è conservativo, un suo potenziale è $\varphi(x,y) = e^x \cos x + e^x \sin y + x \cos y + y^2$; $I_1 = 0$, $I_2 = \varphi(0,\pi) - \varphi(0,0) = \pi^2$
4. -4π
5. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I = [0,1]$ a f con $f(x) = 0$ se $0 \leq x < 1$ e $f(1) = 2$. Converge uniformemente in ogni insieme $[0,a]$ (con $0 < a < 1$).
6. La serie è a termini positivi (eccetto $x = 0$ in cui è banalmente nulla). Per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ la serie converge puntualmente in tutto $[0,+\infty[$. Per la convergenza totale si osserva che $g_n(x)$ assume valore massimo in $x_M = (1/2n)^{1/2}$ e la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x_M)$ è asintotica a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^{2\beta}}$ che converge se e solo se $\beta > 1/2$.
7. $a_0 = \frac{1}{\pi}$, $a_1 = \frac{1}{4}$, $b_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{3\pi}$. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$; $S(4\pi) = 1/2$, $S(\frac{5}{2}\pi) = 0$, $S(3\pi) = 0$.
8. $f(t,y) = t^3(y^2-1)e^{-y^2}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = \pm 1$ soluzioni stazionarie; se $y_0 > 1$ o $y_0 < -1$, soluzione u crescente per $t > 0$, decrescente per $t < 0$, $t = 0$ punto di minimo; se $-1 < y_0 < 1$ soluzione u crescente per $t < 0$, decrescente per $t > 0$, $t = 0$ punto di massimo; Se $y_0 < 1$, $\lim_{t \to \pm\infty} u(t) = -1$; se $y_0 > 1$, $\lim_{t \to \pm\infty} u(t) = +\infty$.

COMPITO 2

1. f è continua in $(0,0)$ per $\alpha > 1/2$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ per ogni $\alpha > 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ non esiste se $\alpha \leq 1$, mentre se $\alpha > 1$ $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$; f è differenziabile in $(0,0)$ se solo se $\alpha > 1$.
2. I punti $(0, \pm 1)$ sono di sella, mentre il punto $(3,0)$ è di minimo relativo.
3. $\overrightarrow{F}$ è conservativo, un suo potenziale è $\varphi(x,y) = e^x \cos x + e^x \sin y + x \cos y + 2y^2$; $I_1 = 0$, $I_2 = \varphi(0,\pi) - \varphi(0,0) = 2\pi^2$
4. -9π
5. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I = [0,1]$ a f con $f(x) = 0$ se $0 \leq x < 1$ e $f(1) = 3$. Converge uniformemente in ogni insieme $[0,a]$ (con $0 < a < 1$).
6. La serie è a termini positivi (eccetto $x = 0$ in cui è banalmente nulla). Per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ la serie converge puntualmente in tutto $[0,+\infty[$. Per la convergenza totale si osserva che $g_n(x)$ assume valore massimo in $x_M = (1/2n)^{1/2}$ e la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x_M)$ è asintotica a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^{4\beta}}$ che converge se e solo se $\beta > 1/4$.
7. $a_0 = \frac{1}{2\pi}$, $a_1 = \frac{1}{8}$, $b_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{6\pi}$. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$; $S(8\pi) = 1/4$, $S(\frac{5}{2}\pi) = 0$, $S(5\pi) = 0$.

8. $f(t,y) = t^5(y^2-1)e^{-y^2}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = \pm 1$ soluzioni stazionarie; se $y_0 > 1$ o $y_0 < -1$, soluzione u crescente per $t > 0$, decrescente per $t < 0$, $t = 0$ punto di minimo; se $-1 < y_0 < 1$ soluzione u crescente per $t < 0$, decrescente per $t > 0$, $t = 0$ punto di massimo; Se $y_0 < 1$, $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = -1$; se $y_0 > 1$, $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = +\infty$.

COMPITO 3

1. f è continua in $(0,0)$ per $\alpha > 1/2$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ per ogni $\alpha > 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ non esiste se $\alpha \le 1$, mentre se $\alpha > 1$ $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$; f è differenziabile in $(0,0)$ se solo se $\alpha > 1$.

2. I punti $(0,\pm 1)$ sono di sella, mentre il punto $(4,0)$ è di minimo relativo.

3. $\overrightarrow{F}$ è conservativo, un suo potenziale è $\varphi(x,y) = e^x \cos x + e^x \sin y + x \cos y + 3y^2$; $I_1 = 0$, $I_2 = \varphi(0,\pi) - \varphi(0,0) = 3\pi^2$

4. -16π

5. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I = [0,1]$ a f con $f(x) = 0$ se $0 \le x < 1$ e $f(1) = 4$. Converge uniformemente in ogni insieme $[0,a]$ (con $0 < a < 1$).

6. La serie è a termini positivi (eccetto $x = 0$ in cui è banalmente nulla). Per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ la serie converge puntualmente in tutto $[0,+\infty[$. Per la convergenza totale si osserva che $g_n(x)$ assume valore massimo in $x_M = (1/2n)^{1/2}$ e la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x_M)$ è asintotica a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^{6\beta}}$ che converge se e solo se $\beta > 1/6$.

7. $a_0 = \frac{1}{3\pi}$, $a_1 = \frac{1}{12}$, $b_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{9\pi}$. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$; $S(12\pi) = 1/6$, $S(\frac{5}{2}\pi) = 0$, $S(7\pi) = 0$.

8. $f(t,y) = t^7(y^2-1)e^{-y^2}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = \pm 1$ soluzioni stazionarie; se $y_0 > 1$ o $y_0 < -1$, soluzione u crescente per $t > 0$, decrescente per $t < 0$, $t = 0$ punto di minimo; se $-1 < y_0 < 1$ soluzione u crescente per $t < 0$, decrescente per $t > 0$, $t = 0$ punto di massimo; Se $y_0 < 1$, $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = -1$; se $y_0 > 1$, $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = +\infty$.
