ANALISI MATEMATICA II- 30 MARZO 2015 - C.d.L.: EDIQQ, EDILMU.

Il numero del compito è dato dall'intero sommato a n^2 nell'argomento di log nell'esercizio 6.

COMPITO 1

1. f è continua in $(0,0)$; esistono tutte le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = 7v_1^3 + 2v_2^3$ con $\vec{v} = (v_1, v_2)$; f non è differenziabile in $(0,0)$.
2. $m = -9$ assunto in $(-3,0)$ e $M = \frac{1}{4}$ assunto in $(-1/2, 1/2)$.
3. $\overrightarrow{F}$ è conservativo per $\alpha = 2/\pi$ e $\beta = 2$; un potenziale è $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{\pi}\sin(7\pi y) + xy^2$, quindi $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma = \varphi(7,1) - \varphi(1,0) = 7$
4. $2^{5/2}$
5. Se $\beta > 7$, $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I =]-\infty, 8[$ a $f(x) \equiv 0$; se $\beta = 7$, $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I =]-\infty, 8]$ a $f(8) = 1$ e $f(x) = 0$ in $]-\infty, 8[$; per ogni $\beta \geq 7$ converge uniformemente in ogni insieme $]-\infty, b]$ con $b < 8$. Il passaggio al limite sotto il segno di integrale è valido.
6. Per $\alpha = 0$ converge solo in $x = 0$. Converge puntualmente in $[0, +\infty[$ se e solo se $\alpha > \frac{1}{5}$; converge totalmente in $[0, +\infty[$ se $\alpha > \frac{1}{3}$; converge totalmente sugli intervalli del tipo $[0, M]$, $M > 0$, se $\frac{1}{5} < \alpha \leq \frac{1}{3}$.
7. $\frac{2}{3}[2(\sqrt{2} - 1) + 8]$
8. $f(t,y) = (y-2) + \arctan(y-2)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = 2$ soluzione stazionaria; se $y_0 < 2$, soluzione u decrescente; se $y_0 > 2$ soluzione u crescente. Se $y_0 < 2$, la soluzione u è concava; se $y_0 > 2$, convessa. Se $y_0 < 2$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = -\infty$ e $u = 2$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$; se $y_0 > 2$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$ e $u = 2$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.

COMPITO 2

1. f è continua in $(0,0)$; esistono tutte le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = 6v_1^3 + 3v_2^3$ con $\vec{v} = (v_1, v_2)$; f non è differenziabile in $(0,0)$.
2. $m = -25$ assunto in $(-5,0)$ e $M = \frac{1}{4}$ assunto in $(-1/2, 1/2)$.
3. $\overrightarrow{F}$ è conservativo per $\alpha = 2/\pi$ e $\beta = 2$; un potenziale è $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{\pi}\sin(6\pi y) + xy^2$, quindi $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma = \varphi(6,1) - \varphi(1,0) = 6$
4. $3^{5/2}$
5. Se $\beta > 6$, $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I =]-\infty, 7[$ a $f(x) \equiv 0$; se $\beta = 6$, $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I =]-\infty, 7]$ a $f(7) = 1$ e $f(x) = 0$ in $]-\infty, 7[$; per ogni $\beta \geq 6$ converge uniformemente in ogni insieme $]-\infty, b]$ con $b < 7$. Il passaggio al limite sotto il segno di integrale è valido.
6. Per $\alpha = 0$ converge solo in $x = 0$. Converge puntualmente in $[0, +\infty[$ se e solo se $\alpha > \frac{1}{9}$; converge totalmente in $[0, +\infty[$ se $\alpha > \frac{1}{5}$; converge totalmente sugli intervalli del tipo $[0, M]$, $M > 0$, se $\frac{1}{9} < \alpha \leq \frac{1}{5}$.
7. $\frac{2}{3}[2(\sqrt{2} - 1) + 27]$

8. $f(t,y) = (y-3) + \arctan(y-3)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = 3$ soluzione stazionaria; se $y_0 < 3$, soluzione u decrescente; se $y_0 > 3$ soluzione u crescente. Se $y_0 < 3$, la soluzione u è concava; se $y_0 > 3$, convessa. Se $y_0 < 3$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = -\infty$ e $u = 3$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$; se $y_0 > 3$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$ e $u = 3$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.

COMPITO 3

1. f è continua in $(0,0)$; esistono tutte le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = 5v_1^3 + 4v_2^3$ con $\vec{v} = (v_1, v_2)$; f non è differenziabile in $(0,0)$.

2. $m = -49$ assunto in $(-7,0)$ e $M = \frac{1}{4}$ assunto in $(-1/2, 1/2)$.

3. $\overrightarrow{F}$ è conservativo per $\alpha = 2/\pi$ e $\beta = 2$; un potenziale è $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{\pi}\sin(5\pi y) + xy^2$, quindi $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma = \varphi(5,1) - \varphi(1,0) = 5$

4. $4^{5/2}$

5. Se $\beta > 5$, $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I =]-\infty, 6[$ a $f(x) \equiv 0$; se $\beta = 5$, $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I =]-\infty, 6]$ a $f(6) = 1$ e $f(x) = 0$ in $]-\infty, 6[$; per ogni $\beta \geq 5$ converge uniformemente in ogni insieme $]-\infty, b]$ con $b < 6$. Il passaggio al limite sotto il segno di integrale è valido.

6. Per $\alpha = 0$ converge solo in $x = 0$. Converge puntualmente in $[0, +\infty[$ se e solo se $\alpha > \frac{1}{13}$; converge totalmente in $[0, +\infty[$ se $\alpha > \frac{1}{7}$; converge totalmente sugli intervalli del tipo $[0, M]$, $M > 0$, se $\frac{1}{13} < \alpha \leq \frac{1}{7}$.

7. $\frac{2}{3}[2(\sqrt{2} - 1) + 64]$

8. $f(t,y) = (y-4) + \arctan(y-4)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = 4$ soluzione stazionaria; se $y_0 < 4$, soluzione u decrescente; se $y_0 > 4$ soluzione u crescente. Se $y_0 < 4$, la soluzione u è concava; se $y_0 > 4$, convessa. Se $y_0 < 4$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = -\infty$ e $u = 4$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$; se $y_0 > 4$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$ e $u = 4$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.

COMPITO 4

1. f è continua in $(0,0)$; esistono tutte le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = 4v_1^3 + 5v_2^3$ con $\vec{v} = (v_1, v_2)$; f non è differenziabile in $(0,0)$.

2. $m = -81$ assunto in $(-9,0)$ e $M = \frac{1}{4}$ assunto in $(-1/2, 1/2)$.

3. $\overrightarrow{F}$ è conservativo per $\alpha = 2/\pi$ e $\beta = 2$; un potenziale è $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{\pi}\sin(4\pi y) + xy^2$, quindi $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma = \varphi(4,1) - \varphi(1,0) = 4$

4. $5^{5/2}$

5. Se $\beta > 4$, $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I =]-\infty, 5[$ a $f(x) \equiv 0$; se $\beta = 4$, $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I =]-\infty, 5]$ a $f(5) = 1$ e $f(x) = 0$ in $]-\infty, 5[$; per ogni $\beta \geq 4$ converge uniformemente in ogni insieme $]-\infty, b]$ con $b < 5$. Il passaggio al limite sotto il segno di integrale è valido.

6. Per $\alpha = 0$ converge solo in $x = 0$. Converge puntualmente in $[0, +\infty[$ se e solo se $\alpha > \frac{1}{17}$; converge totalmente in $[0, +\infty[$ se $\alpha > \frac{1}{9}$; converge totalmente sugli intervalli del tipo $[0, M]$, $M > 0$, se $\frac{1}{17} < \alpha \leq \frac{1}{9}$.

7. $\frac{2}{3}[2(\sqrt{2}-1)+125]$

8. $f(t,y)=(y-5)+\arctan(y-5)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u=5$ soluzione stazionaria; se $y_0<5$, soluzione u decrescente; se $y_0>5$ soluzione u crescente. Se $y_0<5$, la soluzione u è concava; se $y_0>5$, convessa. Se $y_0<5$, $\lim_{t\to+\infty} u(t)=-\infty$ e $u=5$ è asintoto orizzontale per $t\to-\infty$; se $y_0>5$, $\lim_{t\to+\infty} u(t)=+\infty$ e $u=5$ è asintoto orizzontale per $t\to-\infty$.

COMPITO 5

1. f è continua in $(0,0)$; esistono tutte le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)=3v_1^3+6v_2^3$ con $\vec{v}=(v_1,v_2)$; f non è differenziabile in $(0,0)$.

2. $m=-121$ assunto in $(-11,0)$ e $M=\frac{1}{4}$ assunto in $(-1/2,1/2)$.

3. $\overrightarrow{F}$ è conservativo per $\alpha=2/\pi$ e $\beta=2$; un potenziale è $\varphi(x,y)=\frac{x^2}{\pi}\sin(3\pi y)+xy^2$, quindi $\int_\Gamma \overrightarrow{F}\cdot d\Gamma=\varphi(3,1)-\varphi(1,0)=3$

4. $6^{5/2}$

5. Se $\beta>3$, $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I=]-\infty,4[$ a $f(x)\equiv 0$; se $\beta=3$, $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I=]-\infty,4]$ a $f(4)=1$ e $f(x)=0$ in $]-\infty,4[$; per ogni $\beta\geq 3$ converge uniformemente in ogni insieme $]-\infty,b]$ con $b<4$. Il passaggio al limite sotto il segno di integrale è valido.

6. Per $\alpha=0$ converge solo in $x=0$. Converge puntualmente in $[0,+\infty[$ se e solo se $\alpha>\frac{1}{21}$; converge totalmente in $[0,+\infty[$ se $\alpha>\frac{1}{11}$; converge totalmente sugli intervalli del tipo $[0,M]$, $M>0$, se $\frac{1}{21}<\alpha\leq\frac{1}{11}$.

7. $\frac{2}{3}[2(\sqrt{2}-1)+216]$

8. $f(t,y)=(y-6)+\arctan(y-6)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u=6$ soluzione stazionaria; se $y_0<6$, soluzione u decrescente; se $y_0>6$ soluzione u crescente. Se $y_0<6$, la soluzione u è concava; se $y_0>6$, convessa. Se $y_0<6$, $\lim_{t\to+\infty} u(t)=-\infty$ e $u=6$ è asintoto orizzontale per $t\to-\infty$; se $y_0>6$, $\lim_{t\to+\infty} u(t)=+\infty$ e $u=6$ è asintoto orizzontale per $t\to-\infty$.

COMPITO 6

1. f è continua in $(0,0)$; esistono tutte le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)=2v_1^3+7v_2^3$ con $\vec{v}=(v_1,v_2)$; f non è differenziabile in $(0,0)$.

2. $m=-169$ assunto in $(-13,0)$ e $M=\frac{1}{4}$ assunto in $(-1/2,1/2)$.

3. $\overrightarrow{F}$ è conservativo per $\alpha=2/\pi$ e $\beta=2$; un potenziale è $\varphi(x,y)=\frac{x^2}{\pi}\sin(2\pi y)+xy^2$, quindi $\int_\Gamma \overrightarrow{F}\cdot d\Gamma=\varphi(2,1)-\varphi(1,0)=2$

4. $7^{5/2}$

5. Se $\beta>2$, $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I=]-\infty,3[$ a $f(x)\equiv 0$; se $\beta=2$, $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I=]-\infty,3]$ a $f(3)=1$ e $f(x)=0$ in $]-\infty,3[$; per ogni $\beta\geq 2$ converge uniformemente in ogni insieme $]-\infty,b]$ con $b<3$. Il passaggio al limite sotto il segno di integrale è valido.

6. Per $\alpha = 0$ converge solo in $x = 0$. Converge puntualmente in $[0, +\infty[$ se e solo se $\alpha > \frac{1}{25}$; converge totalmente in $[0, +\infty[$ se $\alpha > \frac{1}{13}$; converge totalmente sugli intervalli del tipo $[0, M]$, $M > 0$, se $\frac{1}{25} < \alpha \leq \frac{1}{13}$.

7. $\frac{2}{3}[2(\sqrt{2} - 1) + 343]$

8. $f(t, y) = (y - 7) + \arctan(y - 7)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = 7$ soluzione stazionaria; se $y_0 < 7$, soluzione u decrescente; se $y_0 > 7$ soluzione u crescente. Se $y_0 < 7$, la soluzione u è concava; se $y_0 > 7$, convessa. Se $y_0 < 7$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = -\infty$ e $u = 7$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$; se $y_0 > 7$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$ e $u = 7$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.