ANALISI MATEMATICA II- 3 SETTEMBRE 2015 - C.d.L.: EDIQQ, EDILMU.

Il numero del compito è dato dall'intero sottratto a β nell'esercizio 6.

COMPITO 1

1. f è continua in $(0,0)$; tutte le derivate direzionali esistono e lungo $\vec{v} = (v_1, v_2)$ (con $v_1 \neq 0$ o $v_2 \neq 0$) $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = v_1$, mentre le derivate parziali sono nulle. Verificando che $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) \neq \nabla f(0,0) \cdot \vec{v}$ o mediante la definizione, si mostra che f non è differenziabile in $(0,0)$.
2. $m = 1/4$ assunto in $(0,2)$ e $M = e^2/4$ assunto in $(2,0)$.
3. $\overrightarrow{F}$ è un gradiente; un potenziale è $\varphi(x,y) = xe^{7y} + 7\cos x$; $I_1 = \varphi(-R,0) - \varphi(R,0) = -2R$ e $I_2 = 0$.
4. $\frac{9\pi}{2}$
5. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $\mathbb{R}$ a $f(x) \equiv 0$. La convergenza è anche uniforme in $\mathbb{R}$ se solo se $\alpha < 8$. Converge uniformemente indipendentemente da $\alpha \in \mathbb{R}$ in ogni insieme $]-\infty, b]$ (con $b \in \mathbb{R}$).
6. Per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ la serie converge puntualmente per $x \in]7, +\infty[$; se $\beta < 2$, converge anche in $x = 7$. Con $\beta = 3$ converge totalmente in ogni intervallo $[a, +\infty[$ con $a > 7$.
7. 3
8. $f(t,y) = \frac{\cos y}{\cos y + 2}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e limitata quindi sublineare, esistenza ed unicità globali; $u = \frac{\pi}{2}$ soluzione stazionaria; se $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$ soluzione u crescente; se $\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$ soluzione u decrescente. Se $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$ la soluzione u è concava per $t < t_1$ (con $u(t_1) = 0$), convessa per $t > t_1$. Se $\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$ la soluzione u è convessa per $t > t_2$ (con $u(t_2) = \pi$), concava per $t < t_2$. Per $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$, $u = -\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$; per $\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$ $u = \frac{3}{2}\pi$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$. Per $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$ e per $\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$, $u = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$.

COMPITO 2

1. f è continua in $(0,0)$; tutte le derivate direzionali esistono e lungo $\vec{v} = (v_1, v_2)$ (con $v_1 \neq 0$ o $v_2 \neq 0$) $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = v_1$, mentre le derivate parziali sono nulle. Verificando che $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) \neq \nabla f(0,0) \cdot \vec{v}$ o mediante la definizione, si mostra che f non è differenziabile in $(0,0)$.
2. $m = 1/6$ assunto in $(0,3)$ e $M = e^3/6$ assunto in $(3,0)$.
3. $\overrightarrow{F}$ è un gradiente; un potenziale è $\varphi(x,y) = xe^{6y} + 6\cos x$; $I_1 = \varphi(-R,0) - \varphi(R,0) = -2R$ e $I_2 = 0$.
4. $\frac{11\pi}{2}$
5. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $\mathbb{R}$ a $f(x) \equiv 0$. La convergenza è anche uniforme in $\mathbb{R}$ se solo se $\alpha < 7$. Converge uniformemente indipendentemente da $\alpha \in \mathbb{R}$ in ogni insieme $]-\infty, b]$ (con $b \in \mathbb{R}$).
6. Per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ la serie converge puntualmente per $x \in]6, +\infty[$; se $\beta < 3$, converge anche in $x = 6$. Con $\beta = 4$ converge totalmente in ogni intervallo $[a, +\infty[$ con $a > 6$.
7. 9

8. $f(t,y) = \frac{\cos y}{\cos y+3}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e limitata quindi sublineare, esistenza ed unicità globali; $u = \frac{\pi}{2}$ soluzione stazionaria; se $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$ soluzione u crescente; se $\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$ soluzione u decrescente. Se $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$ la soluzione u è concava per $t < t_1$ (con $u(t_1) = 0$), convessa per $t > t_1$. Se $\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$ la soluzione u è convessa per $t > t_2$ (con $u(t_2) = \pi$), concava per $t < t_2$. Per $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$, $u = -\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$; per $\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$ $u = \frac{3}{2}\pi$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$. Per $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$ e per $\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$, $u = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$.

COMPITO 3

1. f è continua in $(0,0)$; tutte le derivate direzionali esistono e lungo $\vec{v} = (v_1, v_2)$ (con $v_1 \neq 0$ o $v_2 \neq 0$) $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = v_1$, mentre le derivate parziali sono nulle. Verificando che $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) \neq \nabla f(0,0) \cdot \vec{v}$ o mediante la definizione, si mostra che f non è differenziabile in $(0,0)$.

2. $m = 1/8$ assunto in $(0,4)$ e $M = e^4/8$ assunto in $(4,0)$.

3. $\overrightarrow{F}$ è un gradiente; un potenziale è $\varphi(x,y) = xe^{5y} + 5\cos x$; $I_1 = \varphi(-R,0) - \varphi(R,0) = -2R$ e $I_2 = 0$.

4. $\frac{13\pi}{2}$

5. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $\mathbb{R}$ a $f(x) \equiv 0$. La convergenza è anche uniforme in $\mathbb{R}$ se solo se $\alpha < 6$. Converge uniformemente indipendentemente da $\alpha \in \mathbb{R}$ in ogni insieme $]-\infty, b]$ (con $b \in \mathbb{R}$).

6. Per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ la serie converge puntualmente per $x \in]5, +\infty[$; se $\beta < 4$, converge anche in $x = 5$. Con $\beta = 5$ converge totalmente in ogni intervallo $[a, +\infty[$ con $a > 5$.

7. 19

8. $f(t,y) = \frac{\cos y}{\cos y+4}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e limitata quindi sublineare, esistenza ed unicità globali; $u = \frac{\pi}{2}$ soluzione stazionaria; se $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$ soluzione u crescente; se $\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$ soluzione u decrescente. Se $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$ la soluzione u è concava per $t < t_1$ (con $u(t_1) = 0$), convessa per $t > t_1$. Se $\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$ la soluzione u è convessa per $t > t_2$ (con $u(t_2) = \pi$), concava per $t < t_2$. Per $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$, $u = -\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$; per $\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$ $u = \frac{3}{2}\pi$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$. Per $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$ e per $\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$, $u = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$.

COMPITO 4

1. f è continua in $(0,0)$; tutte le derivate direzionali esistono e lungo $\vec{v} = (v_1, v_2)$ (con $v_1 \neq 0$ o $v_2 \neq 0$) $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = v_1$, mentre le derivate parziali sono nulle. Verificando che $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) \neq \nabla f(0,0) \cdot \vec{v}$ o mediante la definizione, si mostra che f non è differenziabile in $(0,0)$.

2. $m = 1/10$ assunto in $(0,5)$ e $M = e^5/10$ assunto in $(5,0)$.

3. $\overrightarrow{F}$ è un gradiente; un potenziale è $\varphi(x,y) = xe^{4y} + 4\cos x$; $I_1 = \varphi(-R,0) - \varphi(R,0) = -2R$ e $I_2 = 0$.

4. $\frac{15\pi}{2}$

5. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $\mathbb{R}$ a $f(x) \equiv 0$. La convergenza è anche uniforme in $\mathbb{R}$ se solo se $\alpha < 5$. Converge uniformemente indipendentemente da $\alpha \in \mathbb{R}$ in ogni insieme $]-\infty, b]$ (con $b \in \mathbb{R}$).

6. Per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ la serie converge puntualmente per $x \in]4, +\infty[$; se $\beta < 5$, converge anche in $x = 4$. Con $\beta = 6$ converge totalmente in ogni intervallo $[a, +\infty[$ con $a > 4$.

7. 33

8. $f(t, y) = \frac{\cos y}{\cos y+5}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e limitata quindi sublineare, esistenza ed unicità globali; $u = \frac{\pi}{2}$ soluzione stazionaria; se $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$ soluzione u crescente; se $\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$ soluzione u decrescente. Se $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$ la soluzione u è concava per $t < t_1$ (con $u(t_1) = 0$), convessa per $t > t_1$. Se $\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$ la soluzione u è convessa per $t > t_2$ (con $u(t_2) = \pi$), concava per $t < t_2$. Per $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$, $u = -\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$; per $\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$ $u = \frac{3}{2}\pi$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$. Per $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$ e per $\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$, $u = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$.

COMPITO 5

1. f è continua in $(0, 0)$; tutte le derivate direzionali esistono e lungo $\vec{v} = (v_1, v_2)$ (con $v_1 \neq 0$ o $v_2 \neq 0$) $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0) = v_1$, mentre le derivate parziali sono nulle. Verificando che $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0) \neq \nabla f(0, 0) \cdot \vec{v}$ o mediante la definizione, si mostra che f non è differenziabile in $(0, 0)$.

2. $m = 1/12$ assunto in $(0, 6)$ e $M = e^6/12$ assunto in $(6, 0)$.

3. $\overrightarrow{F}$ è un gradiente; un potenziale è $\varphi(x, y) = xe^{3y} + 3\cos x$; $I_1 = \varphi(-R, 0) - \varphi(R, 0) = -2R$ e $I_2 = 0$.

4. $\frac{17\pi}{2}$

5. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $\mathbb{R}$ a $f(x) \equiv 0$. La convergenza è anche uniforme in $\mathbb{R}$ se solo se $\alpha < 4$. Converge uniformemente indipendentemente da $\alpha \in \mathbb{R}$ in ogni insieme $]-\infty, b]$ (con $b \in \mathbb{R}$).

6. Per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ la serie converge puntualmente per $x \in]3, +\infty[$; se $\beta < 6$, converge anche in $x = 3$. Con $\beta = 7$ converge totalmente in ogni intervallo $[a, +\infty[$ con $a > 3$.

7. 51

8. $f(t, y) = \frac{\cos y}{\cos y+6}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e limitata quindi sublineare, esistenza ed unicità globali; $u = \frac{\pi}{2}$ soluzione stazionaria; se $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$ soluzione u crescente; se $\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$ soluzione u decrescente. Se $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$ la soluzione u è concava per $t < t_1$ (con $u(t_1) = 0$), convessa per $t > t_1$. Se $\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$ la soluzione u è convessa per $t > t_2$ (con $u(t_2) = \pi$), concava per $t < t_2$. Per $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$, $u = -\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$; per $\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$ $u = \frac{3}{2}\pi$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$. Per $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$ e per $\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$, $u = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$.

COMPITO 6

1. f è continua in $(0, 0)$; tutte le derivate direzionali esistono e lungo $\vec{v} = (v_1, v_2)$ (con $v_1 \neq 0$ o $v_2 \neq 0$) $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0) = v_1$, mentre le derivate parziali sono nulle. Verificando che $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0) \neq \nabla f(0, 0) \cdot \vec{v}$ o mediante la definizione, si mostra che f non è differenziabile in $(0, 0)$.

2. $m = 1/14$ assunto in $(0, 7)$ e $M = e^7/14$ assunto in $(7, 0)$.

3. $\overrightarrow{F}$ è un gradiente; un potenziale è $\varphi(x, y) = xe^{2y} + 2\cos x$; $I_1 = \varphi(-R, 0) - \varphi(R, 0) = -2R$ e $I_2 = 0$.

4. $\frac{19\pi}{2}$

5. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $\mathbb{R}$ a $f(x) \equiv 0$. La convergenza è anche uniforme in $\mathbb{R}$ se solo se $\alpha < 3$. Converge uniformemente indipendentemente da $\alpha \in \mathbb{R}$ in ogni insieme $]-\infty, b]$ (con $b \in \mathbb{R}$).

6. Per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ la serie converge puntualmente per $x \in]2, +\infty[$; se $\beta < 7$, converge anche in $x = 2$. Con $\beta = 8$ converge totalmente in ogni intervallo $[a, +\infty[$ con $a > 2$.

7. 73

8. $f(t, y) = \frac{\cos y}{\cos y + 7}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e limitata quindi sublineare, esistenza ed unicità globali; $u = \frac{\pi}{2}$ soluzione stazionaria; se $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$ soluzione u crescente; se $\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$ soluzione u decrescente. Se $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$ la soluzione u è concava per $t < t_1$ (con $u(t_1) = 0$), convessa per $t > t_1$. Se $\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$ la soluzione u è convessa per $t > t_2$ (con $u(t_2) = \pi$), concava per $t < t_2$. Per $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$, $u = -\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$; per $\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$ $u = \frac{3}{2}\pi$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$. Per $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$ e per $\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$, $u = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$.