ANALISI MATEMATICA II- 4 LUGLIO 2016 - C.d.L.: EDIQQ, EDILMU.

Il numero del compito è dato dalla metà dell'esponente di x al denominatore nel testo dell'esercizio 5.

COMPITO 1

1. f è continua in $(0,0)$. Se $\vec{v}=(v_1,v_2)$, $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)=v_1\sqrt{1+7v_2^2}$e, in particolare, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Verificando che $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)\neq\nabla f(0,0)\cdot\vec{v}$ o mediante la definizione, si mostra che f non è differenziabile in $(0,0)$.

2. I punti $(0,\pm1)$ e i punti dell'asse delle x (quindi del tipo $(\overline{x},0)$) sono stazionari. Tramite il test del determinante hessiano si verifica che $(0,\pm1)$ sono di massimo relativo. Studiando il segno di $f(x,y)-f(\overline{x},0)$ (in un intorno di $(\overline{x},0)$) si verifica che se $|\overline{x}|<\sqrt{4}$ essi sono di minimo relativo; se $|\overline{x}|>\sqrt{4}$ sono di massimo relativo; i punti $(\pm\sqrt{4},0)$ sono di sella.

3. $\frac{1}{3}\left((5)^{3/2}-8\right)$

4. $\frac{1}{3}\pi$

5. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in tutto $\mathbb{R}$ a $f(x)=-x$. Converge uniformemente in ogni intervallo limitato $[a,b]$.

6. la serie ha raggio di convergenza 2 per ogni $\alpha>0$. Se $\alpha>1$ converge totalmente (e quindi uniformemente) in $[-2,2]$. Se $0<\alpha\leq1$ converge in $]-2,2[$ (in $x=2$ diverge), quindi si ha convergenza uniforme in $[-2,r]$ con $0<r<2$.

7. $a_0=\frac{1}{2\pi}$, $a_1=0$, $b_1=0$, $a_2=-\frac{1}{6\pi}$. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è C^1 a tratti. $S(\frac{3}{2}\pi)=\frac{1}{8}$.

8. $f(t,y)=\log(y^2+\frac{e^2}{2})-2$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u=\pm\sqrt{\frac{e^2}{2}}$ soluzioni stazionarie; se $y_0<-\sqrt{\frac{e^2}{2}}$ o $y_0>\sqrt{\frac{e^2}{2}}$, soluzione u crescente; se $-\sqrt{\frac{e^2}{2}}<y_0<\sqrt{\frac{e^2}{2}}$ soluzione u decrescente. Se $-\sqrt{\frac{e^2}{2}}<y_0<\sqrt{\frac{e^2}{2}}$, la soluzione u è concava per $t<t^*$ (con $u(t^*)=0$), convessa per $t>t^*$; se $y_0<-\sqrt{\frac{e^2}{2}}$, la soluzione u è concava, se $y_0>\sqrt{\frac{e^2}{2}}$, convessa. Se $y_0<-\sqrt{\frac{e^2}{2}}$, $\lim_{t\to-\infty}u(t)=-\infty$ e $u=-\sqrt{\frac{e^2}{2}}$ è asintoto orizzontale per $t\to+\infty$; se $-\sqrt{\frac{e^2}{2}}<y_0<\sqrt{\frac{e^2}{2}}$, $\lim_{t\to\pm\infty}u(t)=\mp\sqrt{\frac{e^2}{2}}$ e $u=\mp\sqrt{\frac{e^2}{2}}$ è asintoto orizzontale per $t\to\pm\infty$; se $y_0>\sqrt{\frac{e^2}{2}}$, $\lim_{t\to+\infty}u(t)=+\infty$ e $u=\sqrt{\frac{e^2}{2}}$ è asintoto orizzontale per $t\to-\infty$.

COMPITO 2

1. f è continua in $(0,0)$. Se $\vec{v}=(v_1,v_2)$, $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)=v_1\sqrt{1+6v_2^2}$e, in particolare, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Verificando che $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)\neq\nabla f(0,0)\cdot\vec{v}$ o mediante la definizione, si mostra che f non è differenziabile in $(0,0)$.

2. I punti $(0,\pm1)$ e i punti dell'asse delle x (quindi del tipo $(\overline{x},0)$) sono stazionari. Tramite il test del determinante hessiano si verifica che $(0,\pm1)$ sono di massimo relativo. Studiando il segno di $f(x,y)-f(\overline{x},0)$ (in un intorno di $(\overline{x},0)$) si verifica che se $|\overline{x}|<\sqrt{6}$ essi sono di minimo relativo; se $|\overline{x}|>\sqrt{6}$ sono di massimo relativo; i punti $(\pm\sqrt{6},0)$ sono di sella.

3. $\frac{1}{3}\left((10)^{3/2}-27\right)$

4. $\frac{3}{5}\pi$

5. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in tutto $\mathbb{R}$ a $f(x) = -x$. Converge uniformemente in ogni intervallo limitato $[a, b]$.

6. la serie ha raggio di convergenza 3 per ogni $\alpha > 0$. Se $\alpha > 1$ converge totalmente (e quindi uniformemente) in $[-3, 3]$. Se $0 < \alpha \leq 1$ converge in $]-3, 3[$ (in $x = 3$ diverge), quindi si ha convergenza uniforme in $[-3, r]$ con $0 < r < 3$.

7. $a_0 = \frac{1}{3\pi}$, $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{9\pi}$. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è C^1 a tratti. $S(\frac{3}{2}\pi) = \frac{1}{12}$.

8. $f(t, y) = \log(y^2 + \frac{e^3}{2}) - 3$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = \pm\sqrt{\frac{e^3}{2}}$ soluzioni stazionarie; se $y_0 < -\sqrt{\frac{e^3}{2}}$ o $y_0 > \sqrt{\frac{e^3}{2}}$, soluzione u crescente; se $-\sqrt{\frac{e^3}{2}} < y_0 < \sqrt{\frac{e^3}{2}}$ soluzione u decrescente. Se $-\sqrt{\frac{e^3}{2}} < y_0 < \sqrt{\frac{e^3}{2}}$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 0$), convessa per $t > t^*$; se $y_0 < -\sqrt{\frac{e^3}{2}}$, la soluzione u è concava, se $y_0 > \sqrt{\frac{e^3}{2}}$, convessa. Se $y_0 < -\sqrt{\frac{e^3}{2}}$, $\lim_{t\to-\infty} u(t) = -\infty$ e $u = -\sqrt{\frac{e^3}{2}}$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $-\sqrt{\frac{e^3}{2}} < y_0 < \sqrt{\frac{e^3}{2}}$, $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = \mp\sqrt{\frac{e^3}{2}}$ e $u = \mp\sqrt{\frac{e^3}{2}}$ è asintoto orizzontale per $t \to \pm\infty$; se $y_0 > \sqrt{\frac{e^3}{2}}$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$ e $u = \sqrt{\frac{e^3}{2}}$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.

COMPITO 3

1. f è continua in $(0, 0)$. Se $\vec{v} = (v_1, v_2)$, $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0) = v_1\sqrt{1 + 5v_2^2}$e, in particolare, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Verificando che $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0) \neq \nabla f(0, 0) \cdot \vec{v}$ o mediante la definizione, si mostra che f non è differenziabile in $(0, 0)$.

2. I punti $(0, \pm1)$ e i punti dell'asse delle x (quindi del tipo $(\overline{x}, 0)$) sono stazionari. Tramite il test del determinante hessiano si verifica che $(0, \pm1)$ sono di massimo relativo. Studiando il segno di $f(x, y) - f(\overline{x}, 0)$ (in un intorno di $(\overline{x}, 0)$) si verifica che se $|\overline{x}| < \sqrt{8}$ essi sono di minimo relativo; se $|\overline{x}| > \sqrt{8}$ sono di massimo relativo; i punti $(\pm\sqrt{8}, 0)$ sono di sella.

3. $\frac{1}{3}\left((17)^{3/2} - 64\right)$

4. $\frac{5}{7}\pi$

5. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in tutto $\mathbb{R}$ a $f(x) = -x$. Converge uniformemente in ogni intervallo limitato $[a, b]$.

6. la serie ha raggio di convergenza 4 per ogni $\alpha > 0$. Se $\alpha > 1$ converge totalmente (e quindi uniformemente) in $[-4, 4]$. Se $0 < \alpha \leq 1$ converge in $]-4, 4[$ (in $x = 4$ diverge), quindi si ha convergenza uniforme in $[-4, r]$ con $0 < r < 4$.

7. $a_0 = \frac{1}{4\pi}$, $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{12\pi}$. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è C^1 a tratti. $S(\frac{3}{2}\pi) = \frac{1}{16}$.

8. $f(t, y) = \log(y^2 + \frac{e^4}{2}) - 4$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = \pm\sqrt{\frac{e^4}{2}}$ soluzioni stazionarie; se $y_0 < -\sqrt{\frac{e^4}{2}}$ o $y_0 > \sqrt{\frac{e^4}{2}}$, soluzione u crescente; se $-\sqrt{\frac{e^4}{2}} < y_0 < \sqrt{\frac{e^4}{2}}$ soluzione u decrescente. Se $-\sqrt{\frac{e^4}{2}} < y_0 < \sqrt{\frac{e^4}{2}}$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 0$), convessa per $t > t^*$; se $y_0 < -\sqrt{\frac{e^4}{2}}$, la soluzione u è concava, se $y_0 > \sqrt{\frac{e^4}{2}}$, convessa.

Se $y_0 < -\sqrt{\frac{e^4}{2}}$, $\lim_{t\to-\infty} u(t) = -\infty$ e $u = -\sqrt{\frac{e^4}{2}}$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $-\sqrt{\frac{e^4}{2}} < y_0 < \sqrt{\frac{e^4}{2}}$, $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = \mp\sqrt{\frac{e^4}{2}}$ e $u = \mp\sqrt{\frac{e^4}{2}}$ è asintoto orizzontale per $t \to \pm\infty$; se $y_0 > \sqrt{\frac{e^4}{2}}$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$ e $u = \sqrt{\frac{e^4}{2}}$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.
