ANALISI MATEMATICA II- 4 SETTEMBRE 2017 - C.d.L.: EDIQQ, EDILMU.

Il numero del compito è dato dall'intero sommato a y^2 nel testo dell'esercizio 8.

COMPITO 1

1. f è continua in $(0,0)$; tutte le derivate direzionali esistono e lungo $\vec{v} = (v_x, v_y)$ $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \frac{v_x^3}{v_x^2+v_y^2}$; in particolare $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, Verificando che $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) \neq \nabla f(0,0) \cdot \vec{v}$ o mediante la definizione, si mostra che f non è differenziabile in $(0,0)$.
2. I punti $(0,0)$ e $(1,1)$ sono di sella, mentre i punti su $\{(x,y) \in P : \ 0 < x < 1\,, y > 0\}$ sono di massimo relativo e tutti gli altri sono di minimo relativo.
3. $2[2e^4 - 1] + 5 \arctan 2$
4. $\frac{\pi}{4} \sin 3 + \frac{\pi^2}{16} 3 - \frac{\pi}{8} 3 \log(2)$
5. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $\mathbb{R}$ a f con $f(x) = 0$ se $|x| \leq 2$ e $f(x) = (x/2)^2$ per $|x| > 2$. Converge uniformemente in $[-2,2]$.
6. La serie ha raggio di convergenza ∞ per $\beta > 2$, 0 per $\beta < 2$, 1 per $\beta = 2$; in quest'ultimo caso converge anche in $x = -1$, ma non in $x = 1$; quindi converge uniformemente in ogni intervallo $[-1, r]$ con $-1 < r < 1$.
7. $a_0 = \pi$, $a_n = 0$ se n è pari ≥ 2, $a_n = -\frac{4}{\pi n^2}$ se n è dispari; $b_n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$. Converge puntualmente (ma non uniformemente) in tutto $\mathbb{R}$ perché f è solo C^0 a tratti. $S(2\pi) = 0$, $S(\frac{5}{2}\pi) = \pi$, $S(3\pi) = \pi$.
8. $f(t,y) = (y-2)/\sqrt{y^2+1}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = 2$ soluzione stazionaria; se $y_0 > 2$, u crescente ; se $y_0 < 2$ soluzione u decrescente. Se $y_0 > 2$, la soluzione u è convessa in tutto $\mathbb{R}$. Per $y_0 < 2$ la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = -1/2$); convessa per $t > t^*$. Se $y_0 \neq 2$ $u = 2$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$; se $y_0 < 2$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = -\infty$; se $y_0 > 2$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$. .

COMPITO 2

1. f è continua in $(0,0)$; tutte le derivate direzionali esistono e lungo $\vec{v} = (v_x, v_y)$ $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \frac{v_x^5}{v_x^4+v_y^4}$; in particolare $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, Verificando che $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) \neq \nabla f(0,0) \cdot \vec{v}$ o mediante la definizione, si mostra che f non è differenziabile in $(0,0)$.
2. I punti $(0,0)$ e $(1,1)$ sono di sella, mentre i punti su $\{(x,y) \in P : \ 0 < x < 1\,, y > 0\}$ sono di massimo relativo e tutti gli altri sono di minimo relativo.
3. $3[2e^9 - 1] + 10 \arctan 3$
4. $\frac{\pi}{4} \sin 5 + \frac{\pi^2}{16} 5 - \frac{\pi}{8} 5 \log(2)$
5. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $\mathbb{R}$ a f con $f(x) = 0$ se $|x| \leq 3$ e $f(x) = (x/3)^2$ per $|x| > 3$. Converge uniformemente in $[-3,3]$.
6. La serie ha raggio di convergenza ∞ per $\beta > 3$, 0 per $\beta < 3$, 1 per $\beta = 3$; in quest'ultimo caso converge anche in $x = -1$, ma non in $x = 1$; quindi converge uniformemente in ogni intervallo $[-1, r]$ con $-1 < r < 1$.

7. $a_0 = 2\pi$, $a_n = 0$ se n è pari ≥ 2, $a_n = -\frac{8}{\pi n^2}$ se n è dispari; $b_n = (-1)^{n+1}\frac{4}{n}$. Converge puntualmente (ma non uniformemente) in tutto $\mathbb{R}$ perché f è solo C^0 a tratti. $S(4\pi) = 0$, $S(\frac{9}{2}\pi) = 2\pi$, $S(5\pi) = 2\pi$.

8. $f(t, y) = (y-3)/\sqrt{y^2+2}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = 3$ soluzione stazionaria; se $y_0 > 3$, u crescente ; se $y_0 < 3$ soluzione u decrescente. Se $y_0 > 3$, la soluzione u è convessa in tutto $\mathbb{R}$. Per $y_0 < 3$ la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = -2/3$); convessa per $t > t^*$. Se $y_0 \neq 3$ $u = 3$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$; se $y_0 < 3$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = -\infty$; se $y_0 > 3$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$. .

COMPITO 3

1. f è continua in $(0,0)$; tutte le derivate direzionali esistono e lungo $\vec{v} = (v_x, v_y)$ $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \frac{v_x^7}{v_x^6+v_y^6}$; in particolare $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, Verificando che $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) \neq \nabla f(0,0)\cdot\vec{v}$ o mediante la definizione, si mostra che f non è differenziabile in $(0,0)$.

2. I punti $(0,0)$ e $(1,1)$ sono di sella, mentre i punti su $\{(x,y) \in P : \ 0 < x < 1\,, y > 0\}$ sono di massimo relativo e tutti gli altri sono di minimo relativo.

3. $4[2e^{16} - 1] + 17\arctan 4$

4. $\frac{\pi}{4}\sin 7 + \frac{\pi^2}{16}7 - \frac{\pi}{8}7\log(2)$

5. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $\mathbb{R}$ a f con $f(x) = 0$ se $|x| \leq 4$ e $f(x) = (x/4)^2$ per $|x| > 4$. Converge uniformemente in $[-4, 4]$.

6. La serie ha raggio di convergenza ∞ per $\beta > 4$, 0 per $\beta < 4$, 1 per $\beta = 4$; in quest'ultimo caso converge anche in $x = -1$, ma non in $x = 1$; quindi converge uniformemente in ogni intervallo $[-1, r]$ con $-1 < r < 1$.

7. $a_0 = 3\pi$, $a_n = 0$ se n è pari ≥ 2, $a_n = -\frac{12}{\pi n^2}$ se n è dispari; $b_n = (-1)^{n+1}\frac{6}{n}$. Converge puntualmente (ma non uniformemente) in tutto $\mathbb{R}$ perché f è solo C^0 a tratti. $S(6\pi) = 0$, $S(\frac{13}{2}\pi) = 3\pi$, $S(7\pi) = 3\pi$.

8. $f(t, y) = (y-4)/\sqrt{y^2+3}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = 4$ soluzione stazionaria; se $y_0 > 4$, u crescente ; se $y_0 < 4$ soluzione u decrescente. Se $y_0 > 4$, la soluzione u è convessa in tutto $\mathbb{R}$. Per $y_0 < 4$ la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = -3/4$); convessa per $t > t^*$. Se $y_0 \neq 4$ $u = 4$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$; se $y_0 < 4$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = -\infty$; se $y_0 > 4$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$. .
