ANALISI MATEMATICA 2 - III prova intermedia - 8 gennaio 2016

Il NUMERO della FILA è il primo estremo degli intervalli nel testo dell'esercizio n° 1.

Fila 1

1. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I = [1, 3]$ a f con $f(x) = 0$ se $1 \leq x < 3$ e $f(3) = 2$. Converge uniformemente in ogni insieme $[1, b]$ (con $1 < b < 3$), quindi anche in $[1, 2]$.

2. raggio $+\infty$ se $\alpha > 7$, 0 se $\alpha < 7$, $1/2$ se $\alpha = 7$; in $x = 1/2$ diverge, in $x = -1/2$ oscilla. La somma è $2x(e^{2x} - 1)$.

3. Converge banalmente in $x = 0$ e $x = \pi$; poiché la serie è a termini positivi, usando, ad esempio, il criterio del rapporto asintotico, converge puntualmente nel resto dell'intervallo, eccetto $\frac{\pi}{2}$, dove diverge positivamente. Converge totalmente in $[0, \frac{\pi}{4}]$, poiché $|\frac{(\sin x)^n}{n+7+(\sin x)^{n+1}}| \leq \frac{(\sin x)^n}{n+7} \leq (\frac{1}{\sqrt{2}})^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{\sqrt{2}})^n$ è una serie (geometrica) convergente.

4. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $b_1 = 0$. Converge puntualmente (ma non uniformemente) in tutto $\mathbb{R}$; $S(4\pi) = 1$, $S(\frac{5}{2}\pi) = 0$, $S(3\pi) = -1$.

5. $f(t, y) = y(y-3)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non è sublineare, quindi si possono affermare esistenza ed unicità solo locali; $u = 0$ e $u = 3$ soluzioni stazionarie; se $y_0 < 0$ o $y_0 > 3$ soluzione u crescente; se $0 < y_0 < 3$ soluzione u decrescente. Se $0 < y_0 < 3$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 3/2$), convessa per $t > t^*$; se $y_0 < 0$, la soluzione u è concava, se $y_0 > 3$, convessa. Se $y_0 < 0$, $u = 0$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $0 < y_0 < 3$, $u = 3$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$ e $u = 0$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $y_0 > 3$, $u = 3$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.

Fila 2

1. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I = [2, 4]$ a f con $f(x) = 0$ se $2 \leq x < 4$ e $f(4) = 2$. Converge uniformemente in ogni insieme $[2, b]$ (con $2 < b < 4$), quindi anche in $[2, 3]$.

2. raggio $+\infty$ se $\alpha > 6$, 0 se $\alpha < 6$, $1/3$ se $\alpha = 6$; in $x = 1/3$ diverge, in $x = -1/3$ oscilla. La somma è $3x(e^{3x} - 1)$.

3. Converge banalmente in $x = 0$ e $x = \pi$; poiché la serie è a termini positivi, usando, ad esempio, il criterio del rapporto asintotico, converge puntualmente nel resto dell'intervallo, eccetto $\frac{\pi}{2}$, dove diverge positivamente. Converge totalmente in $[0, \frac{\pi}{4}]$, poiché $|\frac{(\sin x)^n}{n+6+(\sin x)^{n+1}}| \leq \frac{(\sin x)^n}{n+6} \leq (\frac{1}{\sqrt{2}})^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{\sqrt{2}})^n$ è una serie (geometrica) convergente.

4. $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $b_1 = 0$. Converge puntualmente (ma non uniformemente) in tutto $\mathbb{R}$; $S(8\pi) = 2$, $S(\frac{5}{2}\pi) = 0$, $S(5\pi) = -2$.

5. $f(t, y) = y(y-5)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non è sublineare, quindi si possono affermare esistenza ed unicità solo locali; $u = 0$ e $u = 5$ soluzioni stazionarie; se $y_0 < 0$ o $y_0 > 5$ soluzione u crescente; se $0 < y_0 < 5$ soluzione u decrescente. Se $0 < y_0 < 5$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 5/2$), convessa per $t > t^*$; se $y_0 < 0$, la soluzione u è concava, se $y_0 > 5$, convessa. Se $y_0 < 0$, $u = 0$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $0 < y_0 < 5$, $u = 5$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$ e $u = 0$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $y_0 > 5$, $u = 5$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.

Fila 3

1. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I = [3, 5]$ a f con $f(x) = 0$ se $3 \leq x < 5$ e $f(5) = 2$. Converge uniformemente in ogni insieme $[3, b]$ (con $3 < b < 5$), quindi anche in $[3, 4]$.

2. raggio $+\infty$ se $\alpha > 5$, 0 se $\alpha < 5$, $1/4$ se $\alpha = 5$; in $x = 1/4$ diverge, in $x = -1/4$ oscilla. La somma è $4x(e^{4x} - 1)$.

3. Converge banalmente in $x = 0$ e $x = \pi$; poiché la serie è a termini positivi, usando, ad esempio, il criterio del rapporto asintotico, converge puntualmente nel resto dell'intervallo, eccetto $\frac{\pi}{2}$, dove diverge positivamente. Converge totalmente in $[0, \frac{\pi}{4}]$, poiché $|\frac{(\sin x)^n}{n+5+(\sin x)^{n+1}}| \leq \frac{(\sin x)^n}{n+5} \leq (\frac{1}{\sqrt{2}})^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{\sqrt{2}})^n$ è una serie (geometrica) convergente.

4. $a_0 = 0$, $a_1 = 3$, $b_1 = 0$. Converge puntualmente (ma non uniformemente) in tutto $\mathbb{R}$; $S(12\pi) = 3$, $S(\frac{5}{2}\pi) = 0$, $S(7\pi) = -3$.

5. $f(t, y) = y(y-7)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non è sublineare, quindi si possono affermare esistenza ed unicità solo locali; $u = 0$ e $u = 7$ soluzioni stazionarie; se $y_0 < 0$ o $y_0 > 7$ soluzione u crescente; se $0 < y_0 < 7$ soluzione u decrescente. Se $0 < y_0 < 7$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 7/2$), convessa per $t > t^*$; se $y_0 < 0$, la soluzione u è concava, se $y_0 > 7$, convessa. Se $y_0 < 0$, $u = 0$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $0 < y_0 < 7$, $u = 7$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$ e $u = 0$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $y_0 > 7$, $u = 7$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.

Fila 4

1. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I = [4, 6]$ a f con $f(x) = 0$ se $4 \leq x < 6$ e $f(6) = 2$. Converge uniformemente in ogni insieme $[4, b]$ (con $4 < b < 6$), quindi anche in $[4, 5]$.

2. raggio $+\infty$ se $\alpha > 4$, 0 se $\alpha < 4$, $1/5$ se $\alpha = 4$; in $x = 1/5$ diverge, in $x = -1/5$ oscilla. La somma è $5x(e^{5x} - 1)$.

3. Converge banalmente in $x = 0$ e $x = \pi$; poiché la serie è a termini positivi, usando, ad esempio, il criterio del rapporto asintotico, converge puntualmente nel resto dell'intervallo, eccetto $\frac{\pi}{2}$, dove diverge positivamente. Converge totalmente in $[0, \frac{\pi}{4}]$, poiché $|\frac{(\sin x)^n}{n+4+(\sin x)^{n+1}}| \leq \frac{(\sin x)^n}{n+4} \leq (\frac{1}{\sqrt{2}})^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{\sqrt{2}})^n$ è una serie (geometrica) convergente.

4. $a_0 = 0$, $a_1 = 4$, $b_1 = 0$. Converge puntualmente (ma non uniformemente) in tutto $\mathbb{R}$; $S(16\pi) = 4$, $S(\frac{5}{2}\pi) = 0$, $S(9\pi) = -4$.

5. $f(t, y) = y(y-9)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non è sublineare, quindi si possono affermare esistenza ed unicità solo locali; $u = 0$ e $u = 9$ soluzioni stazionarie; se $y_0 < 0$ o $y_0 > 9$ soluzione u crescente; se $0 < y_0 < 9$ soluzione u decrescente. Se $0 < y_0 < 9$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 9/2$), convessa per $t > t^*$; se $y_0 < 0$, la soluzione u è concava, se $y_0 > 9$, convessa. Se $y_0 < 0$, $u = 0$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $0 < y_0 < 9$, $u = 9$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$ e $u = 0$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $y_0 > 9$, $u = 9$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.

Fila 5

1. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I = [5,7]$ a f con $f(x) = 0$ se $5 \leq x < 7$ e $f(7) = 2$. Converge uniformemente in ogni insieme $[5,b]$ (con $5 < b < 7$), quindi anche in $[5,6]$.

2. raggio $+\infty$ se $\alpha > 3$, 0 se $\alpha < 3$, $1/6$ se $\alpha = 3$; in $x = 1/6$ diverge, in $x = -1/6$ oscilla. La somma è $6x(e^{6x} - 1)$.

3. Converge banalmente in $x = 0$ e $x = \pi$; poiché la serie è a termini positivi, usando, ad esempio, il criterio del rapporto asintotico, converge puntualmente nel resto dell'intervallo, eccetto $\frac{\pi}{2}$, dove diverge positivamente. Converge totalmente in $[0, \frac{\pi}{4}]$, poiché $|\frac{(\sin x)^n}{n+3+(\sin x)^{n+1}}| \leq \frac{(\sin x)^n}{n+3} \leq (\frac{1}{\sqrt{2}})^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{\sqrt{2}})^n$ è una serie (geometrica) convergente.

4. $a_0 = 0$, $a_1 = 5$, $b_1 = 0$. Converge puntualmente (ma non uniformemente) in tutto $\mathbb{R}$; $S(20\pi) = 5$, $S(\frac{5}{2}\pi) = 0$, $S(11\pi) = -5$.

5. $f(t,y) = y(y-11)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non è sublineare, quindi si possono affermare esistenza ed unicità solo locali; $u = 0$ e $u = 11$ soluzioni stazionarie; se $y_0 < 0$ o $y_0 > 11$ soluzione u crescente; se $0 < y_0 < 11$ soluzione u decrescente. Se $0 < y_0 < 11$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 11/2$), convessa per $t > t^*$; se $y_0 < 0$, la soluzione u è concava, se $y_0 > 11$, convessa. Se $y_0 < 0$, $u = 0$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $0 < y_0 < 11$, $u = 11$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$ e $u = 0$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $y_0 > 11$, $u = 11$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.

Fila 6

1. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I = [6,8]$ a f con $f(x) = 0$ se $6 \leq x < 8$ e $f(8) = 2$. Converge uniformemente in ogni insieme $[6,b]$ (con $6 < b < 8$), quindi anche in $[6,7]$.

2. raggio $+\infty$ se $\alpha > 2$, 0 se $\alpha < 2$, $1/7$ se $\alpha = 2$; in $x = 1/7$ diverge, in $x = -1/7$ oscilla. La somma è $7x(e^{7x} - 1)$.

3. Converge banalmente in $x = 0$ e $x = \pi$; poiché la serie è a termini positivi, usando, ad esempio, il criterio del rapporto asintotico, converge puntualmente nel resto dell'intervallo, eccetto $\frac{\pi}{2}$, dove diverge positivamente. Converge totalmente in $[0, \frac{\pi}{4}]$, poiché $|\frac{(\sin x)^n}{n+2+(\sin x)^{n+1}}| \leq \frac{(\sin x)^n}{n+2} \leq (\frac{1}{\sqrt{2}})^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{\sqrt{2}})^n$ è una serie (geometrica) convergente.

4. $a_0 = 0$, $a_1 = 6$, $b_1 = 0$. Converge puntualmente (ma non uniformemente) in tutto $\mathbb{R}$; $S(24\pi) = 6$, $S(\frac{5}{2}\pi) = 0$, $S(13\pi) = -6$.

5. $f(t,y) = y(y-13)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non è sublineare, quindi si possono affermare esistenza ed unicità solo locali; $u = 0$ e $u = 13$ soluzioni stazionarie; se $y_0 < 0$ o $y_0 > 13$ soluzione u crescente; se $0 < y_0 < 13$ soluzione u decrescente. Se $0 < y_0 < 13$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 13/2$), convessa per $t > t^*$; se $y_0 < 0$, la soluzione u è concava, se $y_0 > 13$, convessa. Se $y_0 < 0$, $u = 0$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $0 < y_0 < 13$, $u = 13$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$ e $u = 0$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $y_0 > 13$, $u = 13$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.
