ANALISI MATEMATICA II- 9 FEBBRAIO 2016 - C.d.L.: EDIQQ, EDILMU.

Il numero del compito è dato dall'intero sommato a $x\sin(2x)$ nell'esercizio 6.

COMPITO 1

1. f è continua in $(0,0)$; esistono tutte le derivate direzionali e $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2+7v_2^2}$, quindi le derivate parziali sono nulle. Verificando che $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) \neq \nabla f(0,0)\cdot\vec{v}$ (o mediante la definizione) si mostra che f non è differenziabile in $(0,0)$.
2. Per $\alpha = 3$ ammette come unico punto stazionario $(0,1)$ ed è un punto di sella (si può vedere $f(x,y) = g(x) + h(y)$ e $y = 1$ non è di estremo per h).
3. $6\sqrt{3}$
4. 9π
5. $\{f_n\}$ f_n converge puntualmente in $[0,7]$ a f con $f(x) \equiv 0$ per $x \in [0,7[$, $f(7) = \frac{\pi}{4}$; converge uniformemente in ogni intervallo $[0,b]$ con $0 < b < 7$. verificando direttamente, si vede che vale la tesi del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale.
6. $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{4}{3}$, $b_1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{4}$. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è C^1 a tratti. $S(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} + 1$.
7. Si può applicare il teorema di Green e calcolare l'integrale doppio $\iint_T (2y+x)dxdy$ dove T è il quarto di corona circolare di centro $(0,0)$, raggi 1 e 2. Risulta 7.
8. $f(t,y) = 7\sin y(\sin y - 1)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = 0$, $u = \frac{\pi}{2}$, $u = \pi$, $u = 2\pi$ soluzioni stazionarie; se $0 < y_0 < \frac{\pi}{2}$, soluzione u decrescente; se $\frac{\pi}{2} < y_0 < \pi$, soluzione u decrescente; se $\pi < y_0 < 2\pi$, soluzione u crescente. Se $0 < y_0 < \frac{\pi}{2}$, la soluzione u è concava per $t < t_1$ (con $u(t_1) = \frac{\pi}{6}$), convessa $t > t_1$; se $\frac{\pi}{2} < y_0 < \pi$, la soluzione u è concava per $t < t_2$ (con $u(t_2) = \frac{5}{6}\pi$), convessa $t > t_2$; se $\pi < y_0 < 2\pi$, la soluzione u è convessa per $t < t_3$ con $u(t_3) = \frac{3}{2}\pi$, concava per $t > t_3$. Per $0 < y_0 < \frac{\pi}{2}$ $\lim_{t\to-\infty} u(t) = \frac{\pi}{2}$ e $\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0$; per ogni $y_0 \in]\frac{\pi}{2}, 2\pi]$ $\lim_{t\to-\infty} u(t) = \pi$; se $\frac{\pi}{2} < y_0 < \pi$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = \frac{\pi}{2}$; se $\pi < y_0 < 2\pi$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = 2\pi$.

COMPITO 2

1. f è continua in $(0,0)$; esistono tutte le derivate direzionali e $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2+6v_2^2}$, quindi le derivate parziali sono nulle. Verificando che $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) \neq \nabla f(0,0)\cdot\vec{v}$ (o mediante la definizione) si mostra che f non è differenziabile in $(0,0)$.
2. Per $\alpha = 6$ ammette come unico punto stazionario $(0,2)$ ed è un punto di sella (si può vedere $f(x,y) = g(x) + h(y)$ e $y = 2$ non è di estremo per h).
3. $8\sqrt{3}$
4. 16π
5. $\{f_n\}$ f_n converge puntualmente in $[0,6]$ a f con $f(x) \equiv 0$ per $x \in [0,6[$, $f(6) = \frac{\pi}{4}$; converge uniformemente in ogni intervallo $[0,b]$ con $0 < b < 6$. verificando direttamente, si vede che vale la tesi del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale.
6. $a_0 = 3$, $a_1 = \frac{4}{3}$, $b_1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{4}$. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è C^1 a tratti. $S(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} + 2$.

7. Si può applicare il teorema di Green e calcolare l'integrale doppio $\iint_T (4y+2x)dxdy$ dove T è il quarto di corona circolare di centro $(0,0)$, raggi 1 e 2. Risulta 14.

8. $f(t,y) = 6\sin y(\sin y - 1)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = 0$, $u = \frac{\pi}{2}$, $u = \pi$, $u = 2\pi$ soluzioni stazionarie; se $0 < y_0 < \frac{\pi}{2}$, soluzione u decrescente; se $\frac{\pi}{2} < y_0 < \pi$, soluzione u decrescente; se $\pi < y_0 < 2\pi$, soluzione u crescente. Se $0 < y_0 < \frac{\pi}{2}$, la soluzione u è concava per $t < t_1$ (con $u(t_1) = \frac{\pi}{6}$), convessa $t > t_1$; se $\frac{\pi}{2} < y_0 < \pi$, la soluzione u è concava per $t < t_2$ (con $u(t_2) = \frac{5}{6}\pi$), convessa $t > t_2$; se $\pi < y_0 < 2\pi$, la soluzione u è convessa per $t < t_3$ con $u(t_3) = \frac{3}{2}\pi$, concava per $t > t_3$. Per $0 < y_0 < \frac{\pi}{2}$ $\lim_{t\to-\infty} u(t) = \frac{\pi}{2}$ e $\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0$; per ogni $y_0 \in]\frac{\pi}{2}, 2\pi]$ $\lim_{t\to-\infty} u(t) = \pi$; se $\frac{\pi}{2} < y_0 < \pi$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = \frac{\pi}{2}$; se $\pi < y_0 < 2\pi$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = 2\pi$.

COMPITO 3

1. f è continua in $(0,0)$; esistono tutte le derivate direzionali e $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + 5v_2^2}$, quindi le derivate parziali sono nulle. Verificando che $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) \neq \nabla f(0,0) \cdot \vec{v}$ (o mediante la definizione) si mostra che f non è differenziabile in $(0,0)$.

2. Per $\alpha = 9$ ammette come unico punto stazionario $(0,3)$ ed è un punto di sella (si può vedere $f(x,y) = g(x) + h(y)$ e $y = 3$ non è di estremo per h).

3. $10\sqrt{3}$

4. 25π

5. $\{f_n\}$ f_n converge puntualmente in $[0,5]$ a f con $f(x) \equiv 0$ per $x \in [0,5[$, $f(5) = \frac{\pi}{4}$; converge uniformemente in ogni intervallo $[0,b]$ con $0 < b < 5$. verificando direttamente, si vede che vale la tesi del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

6. $a_0 = 5$, $a_1 = \frac{4}{3}$, $b_1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{4}$. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è C^1 a tratti. $S(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} + 3$.

7. Si può applicare il teorema di Green e calcolare l'integrale doppio $\iint_T (6y+3x)dxdy$ dove T è il quarto di corona circolare di centro $(0,0)$, raggi 1 e 2. Risulta 21.

8. $f(t,y) = 5\sin y(\sin y - 1)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = 0$, $u = \frac{\pi}{2}$, $u = \pi$, $u = 2\pi$ soluzioni stazionarie; se $0 < y_0 < \frac{\pi}{2}$, soluzione u decrescente; se $\frac{\pi}{2} < y_0 < \pi$, soluzione u decrescente; se $\pi < y_0 < 2\pi$, soluzione u crescente. Se $0 < y_0 < \frac{\pi}{2}$, la soluzione u è concava per $t < t_1$ (con $u(t_1) = \frac{\pi}{6}$), convessa $t > t_1$; se $\frac{\pi}{2} < y_0 < \pi$, la soluzione u è concava per $t < t_2$ (con $u(t_2) = \frac{5}{6}\pi$), convessa $t > t_2$; se $\pi < y_0 < 2\pi$, la soluzione u è convessa per $t < t_3$ con $u(t_3) = \frac{3}{2}\pi$, concava per $t > t_3$. Per $0 < y_0 < \frac{\pi}{2}$ $\lim_{t\to-\infty} u(t) = \frac{\pi}{2}$ e $\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0$; per ogni $y_0 \in]\frac{\pi}{2}, 2\pi]$ $\lim_{t\to-\infty} u(t) = \pi$; se $\frac{\pi}{2} < y_0 < \pi$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = \frac{\pi}{2}$; se $\pi < y_0 < 2\pi$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = 2\pi$.

COMPITO 4

1. f è continua in $(0,0)$; esistono tutte le derivate direzionali e $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + 4v_2^2}$, quindi le derivate parziali sono nulle. Verificando che $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) \neq \nabla f(0,0) \cdot \vec{v}$ (o mediante la definizione) si mostra che f non è differenziabile in $(0,0)$.

2. Per $\alpha = 12$ ammette come unico punto stazionario $(0,4)$ ed è un punto di sella (si può vedere $f(x,y) = g(x) + h(y)$ e $y = 4$ non è di estremo per h).

3. $12\sqrt{3}$

4. 36π

5. $\{f_n\}$ f_n converge puntualmente in $[0,4]$ a f con $f(x)\equiv 0$ per $x\in[0,4[$, $f(4)=\frac{\pi}{4}$; converge uniformemente in ogni intervallo $[0,b]$ con $0<b<4$. verificando direttamente, si vede che vale la tesi del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

6. $a_0=7$, $a_1=\frac{4}{3}$, $b_1=0$, $a_2=-\frac{1}{4}$. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è C^1 a tratti. $S(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}+4$.

7. Si può applicare il teorema di Green e calcolare l'integrale doppio $\int\int_T(8y+4x)dxdy$ dove T è il quarto di corona circolare di centro $(0,0)$, raggi 1 e 2. Risulta 28.

8. $f(t,y)=4\sin y(\sin y-1)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u=0$, $u=\frac{\pi}{2}$, $u=\pi$, $u=2\pi$ soluzioni stazionarie; se $0<y_0<\frac{\pi}{2}$, soluzione u decrescente; se $\frac{\pi}{2}<y_0<\pi$, soluzione u decrescente; se $\pi<y_0<2\pi$, soluzione u crescente. Se $0<y_0<\frac{\pi}{2}$, la soluzione u è concava per $t<t_1$ (con $u(t_1)=\frac{\pi}{6}$), convessa $t>t_1$; se $\frac{\pi}{2}<y_0<\pi$, la soluzione u è concava per $t<t_2$ (con $u(t_2)=\frac{5}{6}\pi$), convessa $t>t_2$; se $\pi<y_0<2\pi$, la soluzione u è convessa per $t<t_3$ con $u(t_3)=\frac{3}{2}\pi$, concava per $t>t_3$. Per $0<y_0<\frac{\pi}{2}$ $\lim_{t\to-\infty}u(t)=\frac{\pi}{2}$ e $\lim_{t\to+\infty}u(t)=0$; per ogni $y_0\in]\frac{\pi}{2},2\pi]$ $\lim_{t\to-\infty}u(t)=\pi$; se $\frac{\pi}{2}<y_0<\pi$ $\lim_{t\to+\infty}u(t)=\frac{\pi}{2}$; se $\pi<y_0<2\pi$ $\lim_{t\to+\infty}u(t)=2\pi$.

COMPITO 5

1. f è continua in $(0,0)$; esistono tutte le derivate direzionali e $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)=\frac{v_1v_2^2}{v_1^2+3v_2^2}$, quindi le derivate parziali sono nulle. Verificando che $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)\neq\nabla f(0,0)\cdot\vec{v}$ (o mediante la definizione) si mostra che f non è differenziabile in $(0,0)$.

2. Per $\alpha=15$ ammette come unico punto stazionario $(0,5)$ ed è un punto di sella (si può vedere $f(x,y)=g(x)+h(y)$ e $y=5$ non è di estremo per h).

3. $14\sqrt{3}$

4. 49π

5. $\{f_n\}$ f_n converge puntualmente in $[0,3]$ a f con $f(x)\equiv 0$ per $x\in[0,3[$, $f(3)=\frac{\pi}{4}$; converge uniformemente in ogni intervallo $[0,b]$ con $0<b<3$. verificando direttamente, si vede che vale la tesi del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

6. $a_0=9$, $a_1=\frac{4}{3}$, $b_1=0$, $a_2=-\frac{1}{4}$. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è C^1 a tratti. $S(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}+5$.

7. Si può applicare il teorema di Green e calcolare l'integrale doppio $\int\int_T(10y+5x)dxdy$ dove T è il quarto di corona circolare di centro $(0,0)$, raggi 1 e 2. Risulta 35.

8. $f(t,y)=3\sin y(\sin y-1)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u=0$, $u=\frac{\pi}{2}$, $u=\pi$, $u=2\pi$ soluzioni stazionarie; se $0<y_0<\frac{\pi}{2}$, soluzione u decrescente; se $\frac{\pi}{2}<y_0<\pi$, soluzione u decrescente; se $\pi<y_0<2\pi$, soluzione u crescente. Se $0<y_0<\frac{\pi}{2}$, la soluzione u è concava per $t<t_1$ (con $u(t_1)=\frac{\pi}{6}$), convessa $t>t_1$; se $\frac{\pi}{2}<y_0<\pi$, la soluzione u è concava per $t<t_2$ (con $u(t_2)=\frac{5}{6}\pi$), convessa $t>t_2$; se $\pi<y_0<2\pi$, la soluzione u è convessa per $t<t_3$ con $u(t_3)=\frac{3}{2}\pi$, concava per $t>t_3$. Per $0<y_0<\frac{\pi}{2}$ $\lim_{t\to-\infty}u(t)=\frac{\pi}{2}$ e $\lim_{t\to+\infty}u(t)=0$; per ogni $y_0\in]\frac{\pi}{2},2\pi]$ $\lim_{t\to-\infty}u(t)=\pi$; se $\frac{\pi}{2}<y_0<\pi$ $\lim_{t\to+\infty}u(t)=\frac{\pi}{2}$; se $\pi<y_0<2\pi$ $\lim_{t\to+\infty}u(t)=2\pi$.

COMPITO 6

1. f è continua in $(0,0)$; esistono tutte le derivate direzionali e $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2+2v_2^2}$, quindi le derivate parziali sono nulle. Verificando che $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) \neq \nabla f(0,0)\cdot \vec{v}$ (o mediante la definizione) si mostra che f non è differenziabile in $(0,0)$.

2. Per $\alpha = 18$ ammette come unico punto stazionario $(0,6)$ ed è un punto di sella (si può vedere $f(x,y) = g(x) + h(y)$ e $y = 6$ non è di estremo per h).

3. $16\sqrt{3}$

4. 64π

5. $\{f_n\}$ f_n converge puntualmente in $[0,2]$ a f con $f(x) \equiv 0$ per $x \in [0,2[$, $f(2) = \frac{\pi}{4}$; converge uniformemente in ogni intervallo $[0,b]$ con $0 < b < 2$. verificando direttamente, si vede che vale la tesi del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

6. $a_0 = 11$, $a_1 = \frac{4}{3}$, $b_1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{4}$. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è C^1 a tratti. $S(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} + 6$.

7. Si può applicare il teorema di Green e calcolare l'integrale doppio $\iint_T (12y + 6x)dxdy$ dove T è il quarto di corona circolare di centro $(0,0)$, raggi 1 e 2. Risulta 42.

8. $f(t,y) = 2\sin y(\sin y - 1)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = 0$, $u = \frac{\pi}{2}$, $u = \pi$, $u = 2\pi$ soluzioni stazionarie; se $0 < y_0 < \frac{\pi}{2}$, soluzione u decrescente; se $\frac{\pi}{2} < y_0 < \pi$, soluzione u decrescente; se $\pi < y_0 < 2\pi$, soluzione u crescente. Se $0 < y_0 < \frac{\pi}{2}$, la soluzione u è concava per $t < t_1$ (con $u(t_1) = \frac{\pi}{6}$), convessa $t > t_1$; se $\frac{\pi}{2} < y_0 < \pi$, la soluzione u è concava per $t < t_2$ (con $u(t_2) = \frac{5}{6}\pi$), convessa $t > t_2$; se $\pi < y_0 < 2\pi$, la soluzione u è convessa per $t < t_3$ con $u(t_3) = \frac{3}{2}\pi$, concava per $t > t_3$. Per $0 < y_0 < \frac{\pi}{2}$ $\lim_{t\to-\infty} u(t) = \frac{\pi}{2}$ e $\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0$; per ogni $y_0 \in]\frac{\pi}{2}, 2\pi]$ $\lim_{t\to-\infty} u(t) = \pi$; se $\frac{\pi}{2} < y_0 < \pi$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = \frac{\pi}{2}$; se $\pi < y_0 < 2\pi$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = 2\pi$.