ANALISI MATEMATICA 2 - III prova intermedia - 9 gennaio 2019

Il numero del compito è dato dall'intero sottratto ad α nell'esercizio 2.

Fila 1

1. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I = [0, +\infty[$ a f con $f(x) = 0$ se $x > 0$ e $f(0) = 1/4$. Converge uniformemente in ogni insieme $[a, +\infty[$ (con $a > 0$).

2. $R = 0$ se $\alpha > 1$, $R = \infty$ se $\alpha < 1$; $R = 1$, se $\alpha = 1$, converge in $x = 1$ (mediante il criterio di Leibniz) e diverge in $x = -1$ (quindi convergenza uniforme in $[-M, 1]$ con $0 < M < 1$) per il teorema di Abel) e la somma è $\log(1 + x) - x$

3. La serie è a termini positivi. In $x = 0$ la serie non converge. Usando. ad esempio, il criterio del contronto asintotico, la serie converge puntualmente in $]0, +\infty[$, se $\beta > 2$ (se $\beta \leq 2$ la serie diverge positivamente). Per $\beta > 2$ la serie converge totalmente solo in $[a, +\infty[$ con $a > 0$, poiché $1/\sqrt{2 + n^\beta x} \leq 1/\sqrt{2 + n^\beta a}$ per ogni $x \in [a, +\infty[$.

4. $a_0 = 4\pi$, $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$, $b_n = (-1)^{n+1}\frac{4}{n}$. Non converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché è discontinua; converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$ perché è continua a tratti. $S(2\pi) = 2\pi$, $S(3\pi) = 2\pi$.

5. $f(t, y) = \log(1 + y^2) + \arctan(\log(1 + y^2))$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = 0$ soluzione stazionaria; se $y_0 \neq 0$, soluzione u crescente. Se $y_0 < 0$, la soluzione u è concava; se $y_0 > 0$, u è convessa. Se $y_0 < 0$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0$ e $u = 0$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $y_0 > 0$, $\lim_{t\to-\infty} u(t) = 0$ e $u = 0$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.

Fila 2

1. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I = [0, +\infty[$ a f con $f(x) = 0$ se $x > 0$ e $f(0) = 1/6$. Converge uniformemente in ogni insieme $[a, +\infty[$ (con $a > 0$).

2. $R = 0$ se $\alpha > 2$, $R = \infty$ se $\alpha < 2$; $R = 1$, se $\alpha = 2$, converge in $x = 1$ (mediante il criterio di Leibniz) e diverge in $x = -1$ (quindi convergenza uniforme in $[-M, 1]$ con $0 < M < 1$) per il teorema di Abel) e la somma è $\log(1 + x) - x$

3. La serie è a termini positivi. In $x = 0$ la serie non converge. Usando. ad esempio, il criterio del contronto asintotico, la serie converge puntualmente in $]0, +\infty[$, se $\beta > 2$ (se $\beta \leq 2$ la serie diverge positivamente). Per $\beta > 2$ la serie converge totalmente solo in $[a, +\infty[$ con $a > 0$, poiché $1/\sqrt{3 + n^\beta x} \leq 1/\sqrt{3 + n^\beta a}$ per ogni $x \in [a, +\infty[$.

4. $a_0 = 6\pi$, $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$, $b_n = (-1)^{n+1}\frac{6}{n}$. Non converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché è discontinua; converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$ perché è continua a tratti. $S(4\pi) = 3\pi$, $S(5\pi) = 3\pi$.

5. $f(t, y) = \log(1 + y^2) + \arctan(\log(1 + y^2))$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = 0$ soluzione stazionaria; se $y_0 \neq 0$, soluzione u crescente. Se $y_0 < 0$, la soluzione u è concava; se $y_0 > 0$, u è convessa. Se $y_0 < 0$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0$ e $u = 0$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $y_0 > 0$, $\lim_{t\to-\infty} u(t) = 0$ e $u = 0$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.

Fila 3

1. $\{f_n\}$ converge puntualmente (ma non uniformemente) in $I = [0, +\infty[$ a f con $f(x) = 0$ se $x > 0$ e $f(0) = 1/8$. Converge uniformemente in ogni insieme $[a, +\infty[$ (con $a > 0$).

2. $R = 0$ se $\alpha > 3$, $R = \infty$ se $\alpha < 3$; $R = 1$, se $\alpha = 3$, converge in $x = 1$ (mediante il criterio di Leibniz) e diverge in $x = -1$ (quindi convergenza uniforme in $[-M, 1]$ con $0 < M < 1$) per il teorema di Abel) e la somma è $\log(1 + x) - x$

3. La serie è a termini positivi. In $x = 0$ la serie non converge. Usando. ad esempio, il criterio del contronto asintotico, la serie converge puntualmente in $]0, +\infty[$, se $\beta > 2$ (se $\beta \leq 2$ la serie diverge positivamente). Per $\beta > 2$ la serie converge totalmente solo in $[a, +\infty[$ con $a > 0$, poiché $1/\sqrt{4 + n^\beta x} \leq 1/\sqrt{4 + n^\beta a}$ per ogni $x \in [a, +\infty[$.

4. $a_0 = 8\pi$, $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$, $b_n = (-1)^{n+1}\frac{8}{n}$. Non converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché è discontinua; converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$ perché è continua a tratti. $S(6\pi) = 4\pi$, $S(7\pi) = 4\pi$.

5. $f(t, y) = \log(1 + y^2) + \arctan(\log(1 + y^2))$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sublineare, quindi esistenza ed unicità globali; $u = 0$ soluzione stazionaria; se $y_0 \neq 0$, soluzione u crescente. Se $y_0 < 0$, la soluzione u è concava; se $y_0 > 0$, u è convessa. Se $y_0 < 0$, $\lim_{t \to +\infty} u(t) = 0$ e $u = 0$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$; se $y_0 > 0$, $\lim_{t \to -\infty} u(t) = 0$ e $u = 0$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.