ANALISI MATEMATICA II- 9 SETTEMBRE 2016 - C.d.L.: EDIQQ, EDILMU.

Il numero del compito è dato dall'intero sottratto ad α nel testo dell'esercizio 1.

COMPITO 1

1. f è continua in $(0,0)$ per ogni $\alpha > 1$; le derivate direzionali non esistono se $\alpha \le \frac{3}{2}$, mentre $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = 0$ per $\alpha > \frac{3}{2}$; f è differenziabile in $(0,0)$ solo per $\alpha > \frac{3}{2}$.
2. $m = 0$ assunto nei punti intersezione di T con l'asse $x = 0$; $M = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ assunto nei punti $(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{3})$.
3. $\overrightarrow{F}$ è conservativo per $\alpha = 2$ e $\beta = 1$; il potenziale richiesto è $\varphi(x,y) = (x^2+y^2)e^x + (x^2-y^2)e^y$, quindi $\varphi(2,0) = 4(1+e^2)$
4. $\left(e - \frac{3}{2}\sqrt{e}\right)$
5. $\{f_n\}$ converge puntualmente ed uniformemente in $[1,+\infty[$ a $f(x) \equiv 0$.
6. Per $\alpha > 0$ la serie converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$; per $\alpha = 0$ la serie converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \neq k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$. Per $\alpha > 0$ la serie converge uniformemente in tutto $[0,\pi]$. Per $\alpha = 0$ la convergenza uniforme è verificata in ogni intervallo $[a, \pi - a]$ con $0 < a < \pi$.
7. $2(e^2 + 5)$
8. $f(t,y) = y^2(y-3)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non è sublineare, quindi esistenza ed unicità solo locali; $u = 0$ e $u = 3$ soluzioni stazionarie; se $y_0 > 3$ soluzione u crescente; se $y_0 < 0$ o $0 < y_0 < 3$, soluzione u decrescente. Se $0 < y_0 < 3$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 2$), convessa per $t > t^*$; se $y_0 < 0$, la soluzione u è concava, se $y_0 > 3$, convessa. La soluzione è prolungabile a sinistra per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$; se $y_0 < 0$ $\lim_{t\to-\infty} u(t) = 0$ e se $y_0 > 0$ $\lim_{t\to-\infty} u(t) = 3$. Se $0 < y_0 < 3$ $u = 0$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$.

COMPITO 2

1. f è continua in $(0,0)$ per ogni $\alpha > 2$; le derivate direzionali non esistono se $\alpha \le \frac{5}{2}$, mentre $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = 0$ per $\alpha > \frac{5}{2}$; f è differenziabile in $(0,0)$ solo per $\alpha > \frac{5}{2}$.
2. $m = 0$ assunto nei punti intersezione di T con l'asse $x = 0$; $M = \left(\frac{3}{5}\right)^2$ assunto nei punti $(\pm\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{2}{5})$.
3. $\overrightarrow{F}$ è conservativo per $\alpha = 2$ e $\beta = 1$; il potenziale richiesto è $\varphi(x,y) = (x^2+y^2)e^x + (x^2-y^2)e^y$, quindi $\varphi(3,0) = 9(1+e^3)$
4. $2\left(e - \frac{3}{2}\sqrt{e}\right)$
5. $\{f_n\}$ converge puntualmente ed uniformemente in $[2,+\infty[$ a $f(x) \equiv 0$.
6. Per $\alpha > 0$ la serie converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$; per $\alpha = 0$ la serie converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \neq k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$. Per $\alpha > 0$ la serie converge uniformemente in tutto $[0,\pi]$. Per $\alpha = 0$ la convergenza uniforme è verificata in ogni intervallo $[a, \pi - a]$ con $0 < a < \pi$.
7. $3(e^2 + 10)$

8. $f(t,y) = y^2(y-6)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non è sublineare, quindi esistenza ed unicità solo locali; $u = 0$ e $u = 6$ soluzioni stazionarie; se $y_0 > 6$ soluzione u crescente; se $y_0 < 0$ o $0 < y_0 < 6$, soluzione u decrescente. Se $0 < y_0 < 6$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 4$), convessa per $t > t^*$; se $y_0 < 0$, la soluzione u è concava, se $y_0 > 6$, convessa. La soluzione è prolungabile a sinistra per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$; se $y_0 < 0$ $\lim_{t\to-\infty} u(t) = 0$ e se $y_0 > 0$ $\lim_{t\to-\infty} u(t) = 6$. Se $0 < y_0 < 6$ $u = 0$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$.

COMPITO 3

1. f è continua in $(0,0)$ per ogni $\alpha > 3$; le derivate direzionali non esistono se $\alpha \leq \frac{7}{2}$, mentre $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = 0$ per $\alpha > \frac{7}{2}$; f è differenziabile in $(0,0)$ solo per $\alpha > \frac{7}{2}$.

2. $m = 0$ assunto nei punti intersezione di T con l'asse $x = 0$; $M = \left(\frac{4}{7}\right)^2$ assunto nei punti $(\pm\sqrt{\frac{4}{7}}, \frac{3}{7})$.

3. $\overrightarrow{F}$ è conservativo per $\alpha = 2$ e $\beta = 1$; il potenziale richiesto è $\varphi(x,y) = (x^2+y^2)e^x + (x^2-y^2)e^y$, quindi $\varphi(4,0) = 16(1+e^4)$

4. $3\left(e - \frac{3}{2}\sqrt{e}\right)$

5. $\{f_n\}$ converge puntualmente ed uniformemente in $[3,+\infty[$ a $f(x) \equiv 0$.

6. Per $\alpha > 0$ la serie converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$; per $\alpha = 0$ la serie converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \neq k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$. Per $\alpha > 0$ la serie converge uniformemente in tutto $[0,\pi]$. Per $\alpha = 0$ la convergenza uniforme è verificata in ogni intervallo $[a, \pi - a]$ con $0 < a < \pi$.

7. $4(e^2 + 17)$

8. $f(t,y) = y^2(y-9)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non è sublineare, quindi esistenza ed unicità solo locali; $u = 0$ e $u = 9$ soluzioni stazionarie; se $y_0 > 9$ soluzione u crescente; se $y_0 < 0$ o $0 < y_0 < 9$, soluzione u decrescente. Se $0 < y_0 < 9$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 6$), convessa per $t > t^*$; se $y_0 < 0$, la soluzione u è concava, se $y_0 > 9$, convessa. La soluzione è prolungabile a sinistra per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$; se $y_0 < 0$ $\lim_{t\to-\infty} u(t) = 0$ e se $y_0 > 0$ $\lim_{t\to-\infty} u(t) = 9$. Se $0 < y_0 < 9$ $u = 0$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$.
