

Cognome e nome Firma Matricola

Corso di Studi: \diamond AUTLM \diamond MECLM/MECLT \diamond AUTLS/MATLS/MECLS \diamond AMBLS/CIVLS

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE il foglio A e tutti i fogli di protocollo.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

-
1. Calcolare l'integrale triplo $\iiint_T \left(\frac{z}{8} - \frac{1}{4}\right) dx dy dz$ dove $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2, 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

.....
Risposta [4 punti]:

-
2. Calcolare l'area della superficie S definita da $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy, 0 \leq y \leq \sqrt{3}x, x^2 + y^2 \leq 2\}$.

.....
Risposta [4 punti]:

-
3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ definita da

$$f_n(x) = n^{\alpha-1} e^{-(x-n)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si discuta al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza puntuale ed uniforme di $\{f_n\}$.

.....
Risposta [4 punti]:

4. Sia $\beta \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2} x^7}{(2n+1)(n!)^{\beta-1}(2n+2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi la convergenza sul bordo. Per $\beta = 1$ si calcoli la funzione somma $S(x)$ in un opportuno intorno di $x = 0$.

.....

Risposta [4 punti]:

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π , definita in $(0, 2\pi]$ da $f(x) = 3x \sin 2x$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1, b_1 .

.....

Risposta [4 punti]:

6. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della sua serie di Fourier, sulla base delle caratteristiche di f . Si calcolino $S(4\pi), S(3\pi), 4S(\frac{\pi}{4})$.

.....

Risposta [3 punti]:

7. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $ty' + y = ty^2 \log t \quad y(1) = \frac{1}{7}$. (*suggerimento: porre $y = \frac{1}{z}$*)

.....

Risposta [4 punti]:

8. Si consideri il problema di Cauchy $y' = \log(y^2 + \frac{1}{2}), \quad y(0) = y_0$. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e globale e si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

.....

Risposta [5 punti]:

1. Calcolare l'integrale triplo $\iiint_T \left(\frac{z}{8} - \frac{1}{4}\right) dx dy dz$ dove $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2, 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

.....
Risposta [4 punti]:

2. Calcolare l'area della superficie S definita da $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy, 0 \leq y \leq \sqrt{3}x, x^2 + y^2 \leq 2\}$.

.....
Risposta [4 punti]:

3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ definita da

$$f_n(x) = n^{\alpha-1} e^{-(x-n)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si discuta al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza puntuale ed uniforme di $\{f_n\}$.

.....
Risposta [4 punti]:

4. Sia $\beta \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2} x^7}{(2n+1)(n!)^{\beta-1}(2n+2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi la convergenza sul bordo. Per $\beta = 1$ si calcoli la funzione somma $S(x)$ in un opportuno intorno di $x = 0$.

.....
Risposta [4 punti]:

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π , definita in $(0, 2\pi]$ da $f(x) = 3x \sin 2x$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1, b_1 .

.....
Risposta [4 punti]:

6. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della sua serie di Fourier, sulla base delle caratteristiche di f . Si calcolino $S(4\pi)$, $S(3\pi)$, $4S(\frac{\pi}{4})$.

.....
Risposta [3 punti]:

-
7. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $ty' + y = ty^2 \log t \quad y(1) = \frac{1}{7}$. (*suggerimento: porre $y = \frac{1}{z}$*)

.....
Risposta [4 punti]:

-
8. Si consideri il problema di Cauchy $y' = \log(y^2 + \frac{1}{2})$, $y(0) = y_0$. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e globale e si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

.....
Risposta [5 punti]:
