COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA/ANALISI MATEMATICA C- 9 FEBBRAIO 2012.

Il numero del compito è dato dal valore di $y(1)$ nell'esercizio 7.

COMPITO 1

1. $4\pi(1-\log 2)$
2. $1/6$.
3. Si ha convergenza puntuale su $[0,+\infty[$ alla funzione
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{se } x=0\\ 0 & \text{se } x>0.\end{cases}$$
La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $[a,+\infty[$, con $a>0$.
4. convergenza assoluta per ogni $\alpha\geq 0$ sull'intervallo $(-2,2)$ in cui $x^2-4<0$. Nei punti $x=\pm 2$, la serie è data da $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}\log n}$ che converge se $\alpha>\frac{1}{2}$. Per $|x|>2$ la serie diverge quale che sia il valore di α. Per $\alpha\in[0,\frac{1}{4})$, convergenza totale su ogni intervallo $[-a,a]$ con $0<a<2$. Per $\alpha\in(\frac{3}{2},+\infty)$ si ha convergenza totale su $[-2,2]$.
5. $a_0=\frac{28}{\pi}-14$, $a_1=0$, $b_1=0$. La serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$, perché f è C^1 a tratti.
6. $f(t,y)=\arctan(y^2-4)\log^2(3-t)$ è $C^1(]-\infty,3[\times\mathbb{R})$ ed è sublineare, quindi esistenza ed unicità in tutto $]-\infty,3[$. Soluzioni stazionarie $u(t)=\pm 2$. Se $|y_0|>2$ soluzione u crescente. Se $-2<y_0<2$ soluzione u decrescente. Asintoto orizzontale (per $t\to-\infty$) $u=2$ se $y_0>-2$. Se $y_0<-2$ $\lim_{t\to-\infty}u(t)=-\infty$ e non ammette asintoto obliquo.
7. $y(t)=t\sqrt{2t^2-1}$.
8. Si applica il teorema di Green; calcolando $2\iint_R\left(\frac{y}{1+x^2}-x^2\right)dxdy$, risulta $4\arctan 3-4\cdot 3^2$.

COMPITO 2

1. $6\pi(1-\log 2)$
2. $1/8$.
3. Si ha convergenza puntuale su $[0,+\infty[$ alla funzione
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & \text{se } x=0\\ 0 & \text{se } x>0.\end{cases}$$
La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $[a,+\infty[$, con $a>0$.
4. convergenza assoluta per ogni $\alpha\geq 0$ sull'intervallo $(-3,3)$ in cui $x^2-9<0$. Nei punti $x=\pm 3$, la serie è data da $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{3\alpha}\log n}$ che converge se $\alpha>\frac{1}{3}$. Per $|x|>3$ la serie diverge quale che sia il valore di α. Per $\alpha\in[0,\frac{1}{6})$, convergenza totale su ogni intervallo $[-a,a]$ con $0<a<3$. Per $\alpha\in(\frac{4}{3},+\infty)$ si ha convergenza totale su $[-3,3]$.
5. $a_0=\frac{24}{\pi}-12$, $a_1=0$, $b_1=0$. La serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$, perché f è C^1 a tratti.
6. $f(t,y)=\arctan(y^2-9)\log^2(4-t)$ è $C^1(]-\infty,4[\times\mathbb{R})$ ed è sublineare, quindi esistenza ed unicità in tutto $]-\infty,4[$. Soluzioni stazionarie $u(t)=\pm 3$. Se $|y_0|>3$ soluzione u crescente. Se $-3<y_0<3$ soluzione u decrescente. Asintoto orizzontale (per $t\to-\infty$) $u=3$ se $y_0>-3$. Se $y_0<-3$ $\lim_{t\to-\infty}u(t)=-\infty$ e non ammette asintoto obliquo.

7. $y(t) = t\sqrt{5t^2 - 1}$.

8. Si applica il teorema di Green; calcolando $2\iint_R \left(\frac{y}{1+x^2} - x^3\right) dxdy$, risulta $9\arctan 4 - 6 \cdot 4^3$.

COMPITO 3

1. $8\pi(1 - \log 2)$

2. 1/10.

3. Si ha convergenza puntuale su $[0, +\infty[$ alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $[a, +\infty[$, con $a > 0$.

4. convergenza assoluta per ogni $\alpha \geq 0$ sull'intervallo $(-4, 4)$ in cui $x^2 - 16 < 0$. Nei punti $x = \pm 4$, la serie è data da $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{4\alpha}\log n}$ che converge se $\alpha > \frac{1}{4}$. Per $|x| > 4$ la serie diverge quale che sia il valore di α. Per $\alpha \in [0, \frac{1}{8})$, convergenza totale su ogni intervallo $[-a, a]$ con $0 < a < 4$. Per $\alpha \in (\frac{5}{4}, +\infty)$ si ha convergenza totale su $[-4, 4]$.

5. $a_0 = \frac{20}{\pi} - 10$, $a_1 = 0$, $b_1 = 0$. La serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$, perché f è C^1 a tratti.

6. $f(t, y) = \arctan(y^2 - 16)\log^2(5 - t)$ è $C^1(]-\infty, 5[\times\mathbb{R})$ ed è sublineare, quindi esistenza ed unicità in tutto $]-\infty, 5[$. Soluzioni stazionarie $u(t) = \pm 4$. Se $|y_0| > 4$ soluzione u crescente. Se $-4 < y_0 < 4$ soluzione u decrescente. Asintoto orizzontale (per $t \to -\infty$) $u = 4$ se $y_0 > -4$. Se $y_0 < -4$ $\lim_{t\to-\infty} u(t) = -\infty$ e non ammette asintoto obliquo.

7. $y(t) = t\sqrt{10t^2 - 1}$.

8. Si applica il teorema di Green; calcolando $2\iint_R \left(\frac{y}{1+x^2} - x^4\right) dxdy$, risulta $16\arctan 5 - 8 \cdot 5^4$.

COMPITO 4

1. $10\pi(1 - \log 2)$

2. 1/12.

3. Si ha convergenza puntuale su $[0, +\infty[$ alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $[a, +\infty[$, con $a > 0$.

4. convergenza assoluta per ogni $\alpha \geq 0$ sull'intervallo $(-5, 5)$ in cui $x^2 - 25 < 0$. Nei punti $x = \pm 5$, la serie è data da $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{5\alpha}\log n}$ che converge se $\alpha > \frac{1}{5}$. Per $|x| > 5$ la serie diverge quale che sia il valore di α. Per $\alpha \in [0, \frac{1}{10})$, convergenza totale su ogni intervallo $[-a, a]$ con $0 < a < 5$. Per $\alpha \in (\frac{6}{5}, +\infty)$ si ha convergenza totale su $[-5, 5]$.

5. $a_0 = \frac{16}{\pi} - 8$, $a_1 = 0$, $b_1 = 0$. La serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$, perché f è C^1 a tratti.

6. $f(t,y) = \arctan(y^2-25)\log^2(6-t)$ è $C^1(]-\infty,6[\times\mathbb{R})$ ed è sublineare, quindi esistenza ed unicità in tutto $]-\infty,6[$. Soluzioni stazionarie $u(t)=\pm 5$. Se $|y_0|>5$ soluzione u crescente. Se $-5<y_0<5$ soluzione u decrescente. Asintoto orizzontale (per $t\to-\infty$) $u=5$ se $y_0>-5$. Se $y_0<-5$ $\lim_{t\to-\infty}u(t)=-\infty$ e non ammette asintoto obliquo.

7. $y(t) = t\sqrt{17t^2-1}$.

8. Si applica il teorema di Green; calcolando $2\iint_R \left(\frac{y}{1+x^2}-x^5\right)\,dxdy$, risulta $25\arctan 6 - 10\cdot 6^5$.

COMPITO 5

1. $12\pi(1-\log 2)$
2. $1/14$.
3. Si ha convergenza puntuale su $[0,+\infty[$ alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x>0. \end{cases}$$

   La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $[a,+\infty[$, con $a>0$.

4. convergenza assoluta per ogni $\alpha\geq 0$ sull'intervallo $(-6,6)$ in cui $x^2-36<0$. Nei punti $x=\pm 6$, la serie è data da $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{6\alpha}\log n}$ che converge se $\alpha>\frac{1}{6}$. Per $|x|>6$ la serie diverge quale che sia il valore di α. Per $\alpha\in[0,\frac{1}{12})$, convergenza totale su ogni intervallo $[-a,a]$ con $0<a<6$. Per $\alpha\in(\frac{7}{6},+\infty)$ si ha convergenza totale su $[-6,6]$.
5. $a_0=\frac{12}{\pi}-6$, $a_1=0$, $b_1=0$. La serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$, perché f è C^1 a tratti.
6. $f(t,y) = \arctan(y^2-36)\log^2(7-t)$ è $C^1(]-\infty,7[\times\mathbb{R})$ ed è sublineare, quindi esistenza ed unicità in tutto $]-\infty,7[$. Soluzioni stazionarie $u(t)=\pm 6$. Se $|y_0|>6$ soluzione u crescente. Se $-6<y_0<6$ soluzione u decrescente. Asintoto orizzontale (per $t\to-\infty$) $u=6$ se $y_0>-6$. Se $y_0<-6$ $\lim_{t\to-\infty}u(t)=-\infty$ e non ammette asintoto obliquo.
7. $y(t) = t\sqrt{26t^2-1}$.
8. Si applica il teorema di Green; calcolando $2\iint_R \left(\frac{y}{1+x^2}-x^6\right)\,dxdy$, risulta $36\arctan 7 - 12\cdot 7^6$.

COMPITO 6

1. $14\pi(1-\log 2)$
2. $1/16$.
3. Si ha convergenza puntuale su $[0,+\infty[$ alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{7} & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x>0. \end{cases}$$

   La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $[a,+\infty[$, con $a>0$.

4. convergenza assoluta per ogni $\alpha\geq 0$ sull'intervallo $(-7,7)$ in cui $x^2-49<0$. Nei punti $x=\pm 7$, la serie è data da $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{7\alpha}\log n}$ che converge se $\alpha>\frac{1}{7}$. Per $|x|>7$ la serie diverge quale che sia il valore di α. Per $\alpha\in[0,\frac{1}{14})$, convergenza totale su ogni intervallo $[-a,a]$ con $0<a<7$. Per $\alpha\in(\frac{8}{7},+\infty)$ si ha convergenza totale su $[-7,7]$.

5. $a_0 = \frac{8}{\pi} - 4$, $a_1 = 0$, $b_1 = 0$. La serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$, perché f è C^1 a tratti.

6. $f(t, y) = \arctan(y^2 - 49)\log^2(8 - t)$ è $C^1(] - \infty, 8[\times\mathbb{R})$ ed è sublineare, quindi esistenza ed unicità in tutto $] - \infty, 8[$. Soluzioni stazionarie $u(t) = \pm 7$. Se $|y_0| > 7$ soluzione u crescente. Se $-7 < y_0 < 7$ soluzione u decrescente. Asintoto orizzontale (per $t \to -\infty$) $u = 7$ se $y_0 > -7$. Se $y_0 < -7$ $\lim_{t\to-\infty} u(t) = -\infty$ e non ammette asintoto obliquo.

7. $y(t) = t\sqrt{37t^2 - 1}$.

8. Si applica il teorema di Green; calcolando $2\iint_R \left(\frac{y}{1+x^2} - x^7\right) dxdy$, risulta $49 \arctan 8 - 14 \cdot 8^7$.
